

*Thrum, Friedrich:*

**Untersuchungen zum Abdruckvorgang beim Mosaikdruck**

**DOI:** [10.22032/dbt.46309](https://doi.org/10.22032/dbt.46309)

**URN:** [urn:nbn:de:gbv:ilm1-2020300033](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:gbv:ilm1-2020300033)

---

**Zugehörige Publikationen:**

Bilder, Diagramme, Tabellen und Anhang:

**DOI:** [10.22032/dbt.46310](https://doi.org/10.22032/dbt.46310)

**URN:** [urn:nbn:de:gbv:ilm1-2020300042](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:gbv:ilm1-2020300042)

Thesen:

**DOI:** [10.22032/dbt.46311](https://doi.org/10.22032/dbt.46311)

**URN:** [urn:nbn:de:gbv:ilm1-2020300058](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:gbv:ilm1-2020300058)

---

***Retrodigitalisierung der gleichnamigen Ausgabe:***

**Erschienen:** Dissertation, Technische Hochschule Ilmenau, 1981

**Digitalisierung durch:** Universitätsbibliothek Ilmenau / ilmedia

**Digitalisierungsjahr:** 2020

**Scanformat:** TIFF, 450 DPI, 8 BPP

Untersuchungen zum Abdruckvorgang beim Mosaikdruck

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des akademischen Grades

Dr.-Ing.

eingereicht bei der Fakultät für

Technische Wissenschaften

des Wissenschaftlichen Rates

der Technischen Hochschule Ilmenau

vorgelegt von Dipl.-Ing. Friedrich Thrum

Geb. am: 15.12.1946      in: Schleiz

Gutachter: Prof.Dr.-Ing. E.Just

Prof.Dr.-Ing.habil. D.Stündel

Doz.Dr.sc.techn. M.Rauch

Eingereicht am: 08.08.1980

Verteidigung am: 29.04.1981

Verfahrens-Nr.: T 857



ac =

81 B 132-A



## Vorwort

Die notwendigen umfangreichen experimentellen Untersuchungen als Grundlage für die vorliegende Arbeit führte ich während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent an der Technischen Hochschule Ilmenau durch.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, meinem verehrten Lehrer

Herrn Prof.Dr.-Ing. E. Just  
für die Anregung zur Bearbeitung des Themas, für seine wertvollen Hinweise und stets fördernde Kritik sowie vor allem für sein ständiges Interesse am Fortgang der Arbeit zu danken.

Ebenfalls danken möchte ich

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. D. Stündel sowie  
Herrn Doz. Dr. sc. techn. M. Rauch  
für die Übernahme des Referates und das damit gezeigte Interesse an dieser Arbeit.

Januar 1980

Friedrich Thrum

# Verwendete Bezeichnungen

$a_i$	Konstanten
A	Kontaktfläche (Druckfläche) des Druckelementes
$b_i$	Konstanten
B	Breite eines Piezo-Biegeelements
c	Federsteifigkeit des gestoßenen Mediums
$c_k$	Betrag der komplexen Federsteifigkeit
$C_i$	Integrationskonstanten
Ci	Integralcosinus
d	Durchmesser der kreisförmigen Abdruckfläche eines Druckelementes
E	elektrische Feldstärke
F	erregende Kraft
$F_D(x, \dot{x})$	Dämpfungsfunktion des gestoßenen Körpers
$F_D$	$F_D$ bezogen auf $\bar{m}$
$F_G$	Gegenkraft des gestoßenen Materials
$F_G$	$F_G$ bezogen auf $\bar{m}$
$F_R(x)$	Rückstellfunktion des gestoßenen Körpers
$F_R$	$F_R$ bezogen auf $\bar{m}$
h	Rückprallhöhe
H	Fallhöhe
i	Index
$k, k^*, \bar{k}, \tilde{k}$	Dämpfungskoeffizienten des gestoßenen Mediums bei den jeweils angegebenen Bedingungen
L	freie Länge eines Piezo-Biegestreifens
m	Masse des stoßenden Körpers
$m_b$	Masse der am Biegestreifen befestigten Blende
$m_o$	bewegte Masse des gestoßenen Körpers bezogen auf $x^2$
$m^*$	bewegte Masse des gestoßenen Körpers
$\bar{m}$	$= m^* + m$
$m_s$	Eigenmasse eines Piezo-Biegestreifens
n	Exponent in $F_R(x) \sim x^n$
$p_{erf}$	erforderliche Flächenpressung
q	Wegkoordinate (allgemein)
$q_o$	Wegamplitude (allgemein)
$q^*$	Elongation bei $F = 0$

$q_p$	Partikulärer Lösungsanteil
$s$	komplexe Veränderliche des Laplace-Integrals
$\bar{s}^2$	Varianz
$S_i$	Dicken der einzelnen Schichten eines Piezo-Biegeelements ( $i = 1, 2, 3$ , entspr. Bild 47)
$Si$	Integralsinus
$S^*$	$= S_3/2 \cdot S$ (s. Bild 47)
$t$	Zeit; Erklärung der Größen $t_{ab}$ , $t_{aus}$ , $t_{xE}$ , $t_{\ddot{x}E}$ , $t_w$ siehe Bild 13.3
$t_d$	siehe Bild 48
$\Delta t$	Zeitdifferenz zwischen den Extrema der Eindringung $x$ des stoßenden in den gestoßenen Körper und seiner Verzögerung $-\ddot{x}$
$u$	Hilfsvariable
$U$	elektrische Spannung
$v_L$	momentane Durchbiegung des Streifenendes eines Piezo-Biegeelements (s. Bild 48)
$v_{LE}$	Maximalwert von $v_L$
$\bar{v}_L$	$= 2 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} v_L(t)$
$V_{max}$	Maximalwert des Amplitudenfrequenzganges
$v_r$	Geschwindigkeit des Aufzeichnungsträgers relativ zum Druckelement senkrecht zur Druckrichtung
$V$	Verhältnis $m/\dot{x}_0$
$V_g$	Gesamtvolumen eines Biegestreifens
$w$	Hilfsvariable
$W$	in den Umkehrlagen der erregten harmonischen Schwingung gespeicherte Federenergie
$W_o$	Aufprallenergie
$W_{oo}$	Rückprallenergie
$W_{oerf}$	erforderliche Aufprallenergie des Druckelementes
$\Delta W$	Energieverlust durch Materialdämpfung während einer Periode des Schwingers
$\Delta W_s$	Energieverlust durch Materialdämpfung während des Stoßvorganges
$\bar{W}$	kinetische Energie eines Piezo-Biegestreifens zum Zeitpunkt $t_d$ (s. Bild 48) bei sprungförmiger Änderung des angelegten elektrischen Feldes

$x$	Eindringung des stoßenden in den gestoßenen Körper
$x_0$	$= x(t = 0)$
$x_E$	Maximalwert von $x(t)$ während der ersten Halbschwingung
$\dot{x}_0$	$= \dot{x}(t = 0) = v_0$ Aufprallgeschwindigkeit des stoßenden Körpers auf das gestoßene Medium
$\dot{x}_{00}$	$= \dot{x}(t = t_{\text{aus}}) = v_{00}$ Rückprallgeschwindigkeit des stoßenden Körpers
$-\ddot{x}_E$	erster Maximalwert von $-\ddot{x}$ nach Beginn der Schwingung
$y$	Hilfsvariable
$z$	Hilfsvariable
$Z$	Verwischung des Druckzeichens
$\bar{\alpha}_i$	Anstieg der Funktion $y _{\Delta=i}(x)$
$\mu$	Kennwert der Materialdämpfung (Phasenverschiebung zwischen $F$ und $q$ )
$\delta$	$= \ln \left  \frac{q_v}{q_{v+1}} \right $ logarithmisches Dekrement der freien gedämpften Schwingung für zwei aufeinanderfolgende Amplituden verschiedenen Vorzeichens
$\delta^*$	$= \ln \left  \frac{q_v}{q_{v+2}} \right $
$\delta_w$	$= \ln \left  \frac{W_v}{W_{v+2}} \right $ logarithmisches Dekrement der Energie
$\varepsilon$	Newtonsche Stoßzahl
$\Lambda$	Anzahl der Papierlagen
$\xi$ $\eta, \eta^*$ $\lambda$ $\mu, \nu$ $\xi$ $\vartheta$	
$\varphi$	$= 1/(\bar{\varphi} - 0,5); \bar{\varphi} = v_{LE} / \bar{v}_L$
$\Psi$	Dämpfungskapazität
$\psi_e$	Elementdämpfung (siehe /21/)
$\omega$	Kreisfrequenz der gedämpften Eigenschwingung
$\omega_0$	$= \sqrt{\frac{c}{m}}$ Kreisfrequenz des ungedämpften freien Feder-Masse-Schwingers
$\Omega$	Erregerfrequenz
$( )'$	Ableitung nach $t$
$( )'$	Ableitung nach anderen, dem jeweiligen Sachverhalt entsprechenden Veränderlichen



<u>Inhalt</u>	<u>Seite</u>	
0.	Einführung	1
1.	Erfassung des Abdruckvorganges	2
1.1.	Problemanalyse	3
1.2.	Charakterisierung der schlagenden Kontrast- erzeugung als Stoßvorgang zwischen zwei Körpern	4
1.3.	Bemerkungen zur Historie der Stoßforschung	5
1.4.	Experimente zur Aufzeichnung der Bewegungsgrößen	6
1.4.1.	Versuchsaufbau	7
1.4.1.1.	Wegmessung	7
1.4.1.2.	Messung der Verzögerung	9
1.4.1.3.	Versuchsstand mit kleinen Stoßmassen	11
1.4.2.	Meßprogramm und Fehlerbetrachtung	12
1.4.3.	Versuchsergebnisse	14
1.4.3.1.	Ohne Papier und Farbband	15
1.4.3.2.	Auswertung unter drucktechnischen Aspekten	20
1.4.3.3.	Vergleich mit den Ergebnissen anderer Arbeiten	26
1.5.	Theoretische Behandlung	28
1.5.1.	Aufstellen der Stoß-Differentialgleichung	28
1.5.1.1.	Materialdämpfung	30
1.5.1.2.	Modellfindung	38
1.5.1.3.	Untersuchungen am Analogrechner	40
1.5.2.	Zur Lösung der Stoß-Differentialgleichung	46
1.6.	Experimentelle Bestimmung von Dämpfung und Steifigkeit des Systems Drucknadel-Walze	54
1.6.1.	Dämpfung	54
1.6.1.1.	Bestimmungsverfahren	54
1.6.1.1.1.	Harmonische Erregung	55
1.6.1.1.2.	Freie Schwinungen	57
1.6.1.1.3.	Sonstige Bestimmungsmöglichkeiten	58
1.6.1.2.	Ergebnisse	60
1.6.2.	Steifigkeit	63
1.7.	Vergleich der theoretischen mit den experimentellen Ergebnissen	64
2.	Zu den Prinzipien der mechanischen Kontrast- erzeugung	66
3.	Untersuchungen an Piezo-Biegestreifen	69
3.1.	Problemstellung	70
3.2.	Experimente	71
3.3.	Materialdämpfung	77
3.4.	Anwendung des Piezo-Biegestreifens	81

		Seite
4.	Ökonomische Betrachtung	83
5.	Schlußbetrachtung / Zusammenfassung	84
6.	Literaturnachweis	86 bis 92

## 0. Einführung

Der Gedanke, beim Ausdrucken ein Schriftzeichen in einzelne Elemente zu zerlegen (Punkte, Bögen), ist schon alt. Trotzdem findet der Mosaikdruck als eine Form der Klarschrifterzeugung erst in den letzten Jahren breite Anwendung. Der Grund dafür ist darin zu suchen, daß erst mit der modernen Datenverarbeitung die Notwendigkeit, Schriftzeichen in schneller Folge zu erzeugen, immer deutlicher wird.

Die mosaikförmige Zeichenbildung bietet dafür günstige Bedingungen, ist man doch durch sie nicht an einen festen Zeichensatz gebunden. Es sind mehrere hundert Zeichen/s möglich.

Darauf aufbauend entstanden natürlich auch eine Vielzahl interessanter und anwendungsbereiter Verfahren, die die Schriftzeichen auf nichtmechanischem Wege erzeugen (u.a. Tintenstrahlschreiber, Thermindruck, fotochemische Aufzeichnung). Diese haben zwar spezielle Vorteile, z.B. die Geräuscharmheit, sind aber stets mit besonderen Bedingungen verknüpft; genannt seien hier die zum Teil notwendigen Spezialpapiere. Solche Verfahren werden daher entweder teuer oder sind nicht universell einsetzbar. Dies rechtfertigt die verstärkten Bemühungen, bereits existierende Druckwerke mechanischer Kontrasterzeugung zu untersuchen und in ihrem Leistungsvermögen voranzutreiben bzw. gänzlich neue Verfahren zu entwerfen.

Es zeichnen sich international zwei Tendenzen der Entwicklung von (Mosaik)-Druckwerken ab:

1. große Zeichenzahl pro Zeiteinheit, aber relativ kompliziert im Aufbau und teuer;
2. kleinere Druckfrequenz, jedoch einfach und robust gestaltet.

Die vorgelegte Arbeit umfaßt Probleme, die gleichermaßen für beide Gebiete interessant sind. Bei den Mosaikdruckwerken werden bis heute die einzelnen Druckelemente (Nadeln, Drähte) gegen den Aufzeichnungsträger geschlagen. Ein Teil der Untersuchungen befaßt sich daher mit diesem Schlagvorgang, der physikalisch als Stoß zwischen zwei Körpern angesehen werden kann.

Die diesen Stoß kennzeichnenden Bewegungsgrößen Beschleunigung, Geschwindigkeit und Weg als auch die Stoßdauer bestimmen die Schriftqualität bzw. die Schreibgeschwindigkeit. Kennt man qualitativ als auch quantitativ die Zusammenhänge zwischen diesen Abdruckkenngrößen, dann ist man in der Lage, bei Vorgabe einiger dieser oder ähnlicher Größen (z.B. Schreibgeschwindigkeit und Anzahl der Durchschläge) gezielt den dazu erforderlichen Antrieb aufzubauen. Dies spart Entwicklungsarbeit und Kosten.



Über den Abdruckvorgang eines Druckelementes liegen bisher nur wenige Erkenntnisse vor. Dieser Problemkreis nimmt hier daher den breitesten Raum ein. Die Kenntnis des zeitlichen Ablaufs des Abdruckvorganges erlaubt auch die Beantwortung der Frage, in welchen Zeitabschnitten des Vorganges noch die größten Reserven zur Verkürzung der Abdruckdauer liegen.

Mit Fragen der systematischen Neuentwicklung von Druckwerken beschäftigt sich der zweite Teil der Untersuchung.

Im dritten Komplex wird ein mögliches Antriebsmittel von Druckelementen, der Piezobiegestreifen, untersucht. Im engen Zusammenhang mit dem ersten Problemkreis werden dabei besonders die Dämpfungseigenschaften der Biegestreifen betrachtet.

### 1. Erfassung des Abdruckvorganges

Meist findet man in der Literatur, daß als Begründung für die Notwendigkeit, den Druckvorgang einer eingehenden Betrachtung zu unterziehen, neben der Frage nach der notwendigen Druckenergie die unmittelbare Abhängigkeit der größtmöglichen Zeichenfrequenz des Gerätes von der Dauer des einzelnen Abdruckvorganges herangezogen wird. Dies ist tatsächlich gravierend, aber nur für solche Druckwerke, die die Kontrasterzeugung schlagend herbeiführen. Mit dieser latenten Einschränkung wird aber die Anzahl prinzipiell möglicher Druckverfahren stark verringert. Im zweiten Kapitel wird gezeigt, wie man durch systematische Suche durchaus zu Druckprinzipien vorstoßen kann, bei denen die Druckdauer im obigen Sinne gar nicht mehr existiert. Das heißt, daß die mechanischen Eigenschaften von Druckelement, Farbstoffträger, Aufzeichnungsträger (Papier) und Unterlage (meist Gummiwalze) im Gegensatz zu den schlagenden Verfahren ihre Bedeutung für die maximal erreichbare Zeichenfrequenz verlieren. Hinzu kommen eine Reihe anderer entscheidender Vorteile der dort vorgestellten Gruppe von Druckwerken, die die schlagende Kontrasterzeugung zurückdrängen. Anstelle der Abdruckdauer tritt die Frage nach den dabei auftretenden Kräften auf. Dieses Problem tangiert eine weit größere Gruppe von Druckwerken (eventuelle Rückwirkung auf Druckelementantrieb, Schriftgüte bei Verwendung von Farbbändern, Festigkeit des Aufzeichnungsträgers u.ä.).

Letztlich ist aber auch allein die Aufgabe, den Stoßvorgang zwischen zwei realen Körpern zu erfassen, Begründung genug für die Ausführlichkeit dieses Abschnittes. Für eine mathematische Beschreibung des Abdruckvorganges wird im Interesse einer leichten Überschaubarkeit oft der Weg beschritten, daß experimentell gewonnene Zusammenhänge - z.B. die Kontaktkraft zwischen Druckelement und Aufzeichnungsträger in Ab-



hängigkeit von der Eindringung oder der Zeit - durch geeignete Funktionen approximiert werden (z.B. /1/). Diese stark vereinfachte Behandlung dieses dynamischen Vorganges erlaubt zwar in beschränktem Umfang und ohne unbedingt weitere Experimente durchführen zu müssen gewisse Aussagen über Tendenzen bei Variation mancher Parameter, es ist aber damit noch keine Begründung des Funktionsverlaufes gegeben. Infolgedessen können auch daraus gezogene Schlußfolgerungen für die Gestaltung des gesamten Druckwerkes nur unvollständig sein. Aus diesem Grunde wird hier, ohne die Forderung nach leichter Überschaubarkeit der Zusammenhänge zu verletzen, dieser Weg nicht beschritten, sondern über das dynamische Kräftegleichgewicht die Bewegungsdgl. gesucht. Stimmt ihre Lösung mit den Experimenten hinreichend genau überein, dann hat man den Vorgang wirklich erfaßt und kann begründete Aussagen treffen.

#### 1.1. Problemanalyse

Es gibt verschiedene Arten mechanischer Druckwerke mit schlagender Kontrasterzeugung, die in Tabelle 1 - geordnet nach den beiden wichtigsten Aspekten - zusammengestellt sind. Vorrangig interessant für den Aufbau eines Druckwerkes sind je nach Einsatzgebiet die Abhängigkeiten verschiedener Qualitätskennzeichen, wie Schriftgüte (Kontrast, Verwischung), mögliche Anzahl der Nutzen, Beschädigung des Aufzeichnungsträgers an der Druckstelle, mögliche Zeichenfrequenz, Lebensdauer und Geräusche von den Parametern Druckelementmasse, Form des Druckelementes an der Kontaktseite, Konsistenz des Aufzeichnungsträgers sowie von der Beschaffenheit des Farbbandes<sup>1)</sup>, von den mechanischen Eigenschaften der Aufzeichnungsträgerunterlage (meist Gummwalze), von der Auftreffgeschwindigkeit des Druckelementes und der Relativgeschwindigkeit zwischen Druckelement und Papier während des Stoßes. Übersichtlich und aufschlußreich sind Diagramme, in denen mehrere Abhängigkeiten gleichzeitig dargestellt sind (z.B. zwischen Druckenergien, Anzahl Nutzen, Walzenhärte und der erwähnten Relativgeschwindigkeit).

Bei Beschädigungen ist zu unterscheiden zwischen einem Durchstoßen und einem Zerreißen des Papiers (letzteres nur bei fliegendem Druck). Die Grenzen eines durchstoß- und zerreißfreien Abdrucks werden angegeben, ansonsten ist bei allen Ergebnissen stets Beschädigungsfreiheit vorausgesetzt. Eine große Zeichenfrequenz muß im Sinne einer

<sup>1)</sup> Selbstschreibende (druckempfindliche) Papiere und die Möglichkeit einer Einfärbung des Druckelementes selbst wurden nicht untersucht.

auf Grund der eingangs erwähnten Entwicklungstendenzen vorgenommenen Einteilung der Druckwerke in Leistungsklassen nicht in jedem Falle eine Erhöhung des Gebrauchswertes des Druckwerkes bedeuten (abhängig auch vom Anwendungsbereich).

Diese Zusammenhänge sind experimentell zu erfassen, dazu gehören die Zeitverläufe der Bewegungsgrößen bei jeder Parameterkombination. Eine Erklärung der Eigenschaften der erwähnten Abhängigkeiten ist damit auf rein experimenteller Basis bereits möglich. Um über den Umfang der Experimente hinaus klare Aussagen treffen zu können, ist die Erarbeitung einer Theorie notwendig, die es gestattet, die zeitabhängigen Bewegungsgrößen genügend genau zu berechnen.

Als zentrales Problem schält sich dabei die Erfassung der Dämpfungseigenschaften - sowohl experimentell als auch theoretisch - heraus.

Der Aufbau eines Versuchsstandes und die Durchführung der Experimente gestalten sich einfacher, wenn freier Druck gewählt wird.

#### 1.2. Charakterisierung der schlagenden Kontrasterzeugung als Stoßvorgang zwischen zwei Körpern

Das Druckelement (Stoßkörper 1) schlägt gegen die Körperpaarung Farbtträger/Papier/Unterlage (Stoßkörper 2). Hat die Relativgeschwindigkeit zwischen beiden Stoßkörpern keine Komponente senkrecht zur Richtung des stoßenden Körpers, dann sind Stoßnormale und Relativgeschwindigkeit kollinear. Dies kann auch ohne Bedenken behauptet werden beim Abdruck der stabförmigen Druckelemente am oberen und unteren Rand eines Zeichens unter Verwendung einer in der Praxis als Papierunterlage üblichen Gummiwalze, denn die Krümmung der Walzenoberfläche über eine Zeichenhöhe kann vernachlässigt werden. Es handelt sich also beim ruhenden Abdruck um einen geraden und im allgemeinen zentrischen Stoß. Dieser Fall wird im folgenden untersucht. Nur experimentell wird der schiefe Stoß erfaßt, der beim fliegenden Abdruck vorliegt. Strenggenommen erfahren beide am Stoß beteiligten Körper während des Kontaktes eine Verformung, die in Kompressions- und Restitutionsphase zu unterteilen ist. Ohne jedoch die Verhältnisse entscheidend zu ändern, kann man die Annahme treffen, daß die Verformung des vergleichsweise harten Druckelementes gegenüber der des relativ weichen Stoßkörpers 2 zu vernachlässigen ist.

Im Interesse großer Schreibgeschwindigkeiten und kleiner Abmessungen der Druckköpfe werden die Druckelemente sehr massearm ausgelegt. Auf Grund der dagegen sehr großen Masse der starr mit dem Gestell verbundenen Walze wird zugrunde gelegt, daß der Schwerpunkt des Stoßkörpers 2 während des Stoßes seine Lage nicht verändert. Auf die Einhaltung dieser Bedingung ist bei Versuchen mit stoßenden Körpern größe-

rer Masse unbedingt zu achten. Die Annäherung der Schwerpunkte beider Stoßkörper ist also identisch mit der Kompression von Farbband, Papier und Walze. In Bild 1 wird dies schematisch gezeigt.

Damit bestimmen allein die elastischen und dämpfenden Eigenschaften des unter dem stoßenden Körper zusammengedrückten Farbband-, Papier- und Walzenmaterials die Bewegungsgrößen des Druckelementes bei vorgegebener Auftreffgeschwindigkeit, vorausgesetzt, das Druckelement unterliegt während des Stoßes keinen weiteren äußeren Kräften. Die Luftreibung ist bedeutungslos.

### 1.3. Bemerkungen zur Historie der Stoßforschung /2,13/

Die durch den Stoß erzielten Wirkungen sind der Menschheit schon von jeher bekannt. Man machte die Erfahrung, daß z.B. der Schlag mit einem Stock oder Stein weit wirksamer sein kann als eine langfristig wirkende Kraft. Das Interesse am Stoß ist also naturbedingt sehr alt. Die Stoßforschung wurde im Grunde von Aristoteles eingeleitet, setzte sich im wesentlichen über Galilei, R. Descartes und Huygens fort, bis sie durch Newton ein vorläufiges Ende fand. Nachdem im gesamten 18. Jahrhundert nur zwei Arbeiten von D. Bernoulli und J. Riccati von Bedeutung sind, hatten später St. Venant, Voigt, Neumann und vor allem Hertz großen Anteil am Fortgang der Forschungen. Allen diesen Arbeiten und auch dem im Jahre 1924 von Berger /2/ veröffentlichten Buch über die Ergebnisse seiner Stoßuntersuchungen ist es gemeinsam, daß die Energieverluste beim Stoßvorgang entweder überhaupt nicht oder nur global über die gesamte Stoßdauer erfaßt werden. Lediglich bei Pöschl /in 3/ findet sich der Versuch, die Reibkraft als zeitlich veränderliche Größe mit einzubeziehen. Dort wird die Reibkraft als proportional dem Quadrat der Momentangeschwindigkeit angenommen.

Die Gründe für das vergleichsweise zu anderen Gebieten der Mechanik langsame Voranschreiten der Stoßforschung sind wohl hauptsächlich in der Tatsache zu suchen, daß die beim Stoßvorgang auftretende Deformation der Körper sehr kurzzeitig ist und sich daher meßtechnisch nur schwer erfassen läßt. So war man lange Zeit nicht in der Lage, die theoretischen Ergebnisse durch hinreichend genaue Messungen zu überprüfen. Man begnügte sich daher mit der experimentellen Erfassung der Stoßwirkung, nicht aber mit dem eigentlichen Stoßvorgang. So ist auch heute noch eine genaue, von den Stoßkörpereigenschaften (Geometrie, Material) ausgehende Theorie der Vorgänge während des Stoßes ein noch nicht befriedigend gelöstes Problem. Während man geneigt ist, die geometrischen Verhältnisse zunächst durch entsprechende konstante Para-



meter in einer Stoßgleichung zu erfassen, verlagert sich das Problem mehr hin zu der Frage, welche Vorgänge sich beim Stoß im Materialgefüge, also im Inneren der Stoßkörper, abspielen. Es geht dabei vornehmlich um die Erscheinung der plastischen Deformation, also um eine Werkstoffeigenschaft und deren Messung.

Anknüpfung zu neueren Arbeiten auf dem Gebiet des Stoßes zweier Körper findet man z.B. in /4 bis 11/.

#### 1.4. Experimente zur Aufzeichnung der Bewegungsgrößen

Neben der Messung der Beträge der Bewegungsgrößen Weg und Beschleunigung ist die Ermittlung der Energiebilanz interessant, d.h. Registrierung der Energie des Druckelementes zu Kontaktbeginn und -ende. Für diese Energiebilanz ist also nicht die vollständige Aufzeichnung des Geschwindigkeit-Zeit-Verlaufs  $\dot{x}(t)$  notwendig; man benötigt nur die Anstiegswerte  $\dot{x}$  von  $x(t)$  in den genannten Zeitpunkten, nämlich  $\dot{x}(t = 0) := \dot{x}_0$  und  $\dot{x}_{00}$ . Dies wird grafisch erledigt. Wie noch ersichtlich werden wird, ist zur Ermittlung der Kontaktdauer unbedingt die Aufzeichnung  $\ddot{x}(t)$  notwendig. Da die Kenntnis des Beschleunigungsverlaufes ohnehin zur Kräfteanalyse und damit zur Aufstellung der Bewegungsgl. benötigt wird, eröffnet sich die Möglichkeit, die Energiebilanz auch ohne  $\dot{x}_{00}$  durch Auswertung von  $\ddot{x}(x)$  zu erhalten. Hier sollen beide Verfahren zur gegenseitigen Kontrolle und besseren Fehlererkennung zur Anwendung kommen. Das in der Praxis oft verwendete Verfahren, nur eine der drei Bewegungsgrößen aufzuzeichnen und diese dann bis zum Maximalwert (bei  $x(t)$  und  $\ddot{x}(t)$ ) oder zum Erreichen des Nullwertes (bei  $\dot{x}(t)$ ) durch eine Sinusfunktion bestimmter Frequenz anzunähern, um so durch Differentiation bzw. Integration wenigstens auf die Maximalwerte der anderen beiden Funktionen zu schließen, erweist sich durch die einfache Überlegung, daß die Funktion  $\ddot{x}(x)$  auf Grund des realen, also verlustbehafteten Stoßes im gesamten Bereich  $0 < x < x_{\max}$  zweiwertig sein muß, als falsch. Die dann bei Differentiation vor dem Sinusausdruck als Faktor auftauchende Kreisfrequenz der Ersatzschwingung kann also keine Konstante sein. Wenn man trotzdem in der Berechnung der Maximalwerte der beiden fehlenden Bewegungsgrößen so einfach vorgehen möchte, dann ist, um die Fehler nicht zu groß werden zu lassen, für jede Funktion  $x$ ,  $\dot{x}$  bzw.  $\ddot{x}(t)$  eine andere Frequenz festzusetzen. Um diese zu ermitteln, ist selbst hier die Aufzeichnung einer zweiten Bewegungsgröße notwendig /12/. Bei der Konzipierung der Experimente muß natürlich auch beachtet werden, daß die Meßergebnisse als Basis für die Beurteilung der Theorie reproduzierbar sein müssen. Ein möglichst einfacher Aufbau der Versuchsanlage kommt dem entgegen.

#### 1.4.1. Versuchsaufbau

Neben der eben begründeten Beschleunigungsmessung wird als zweite Bewegungsgröße die Eindringung  $x$  registriert, die wegen der oben beschriebenen Ermittlung der Energiebilanz erforderlich wird. Die Möglichkeit der zweimaligen elektrischen Integration von  $\ddot{x}(t)$  wird auch hier zur Kontrolle und zum Vergleich herangezogen. Zweifache Differentiation der Weg-Zeit-Funktion scheidet aus. Für beide Meßaufgaben ist also eine geeignete Kombination Meßwertaufnehmer/-wandler zu finden, durch die dann auch die nachfolgenden Glieder der Meßkette bestimmt werden.

##### 1.4.1.1. Wegmessung

Grundsätzlich wird hier gefordert, daß die Meßwertaufnahme kraftlos geschieht, d.h. dem Stoßvorgang darf zur Messung keine Energie entzogen werden. Hauptsächlich aus diesem Grunde wurde ein fotoelektrisches Verfahren gewählt, bei dem eine am Druckelement angebrachte Blende einen auf eine Fotozelle fallenden Lichtstrom  $\Phi$  variiert. Eine Änderung  $\Delta \Phi$  bewirkt durch eine dadurch hervorgerufene verstärkte oder geschwächte Elektronenemission der Fotoschicht der Zelle eine Spannungsschwankung  $\Delta U$  am Eingang des Oszillografen (Bild 2). Die Strahlen der Lichtquelle werden durch eine Kondensorlinse parallelisiert. In dieses Parallelstrahlenbündel wird eine Spaltblende geeigneter Breite eingeschoben. Die nach dieser Spaltblende in den Lichtstrahlenbereich eintauchende Druckelementblende verändert entsprechend der momentanen Eindringtiefe des Druckelementes in das Papier die Breite des durch eine weitere Sammellinse auf die Fotozelle projizierten Spaltbildes. Um den Meßvorgang praktisch trägheitslos ablaufen zu lassen, sollte eine Vakuumzelle verwendet werden. Eine zeitliche Verzerrung ist damit ausgeschlossen. Außerdem ist man in der Lage, durch die Wahl des Nullpunktes (Stellung der Druckelementblende im rechteckigen Ausschnitt der Spaltblende bei kraftloser Anlage des Druckelementes an die Papieroberfläche), durch die Verwendung einer mit einer großflächigen Kathode ausgestatteten Zelle und schließlich durch Wahl der Breite, Höhe und Winkelstellung der Spaltblende stets eine lineare Abhängigkeit zwischen Eindringung  $\Delta x$  des Druckelementes und  $\Delta U$  bzw. Auslenkung des Elektronenstrahls im Oszillografen zu erreichen. Dies ist entscheidend für eine einfache Auswertung des fotografisch festgehaltenen Stoßvorganges (Bild 3).

Die Eichung der Meßeinrichtung erfolgt statisch durch definierten Vorschub des Druckelementes über eine Feinmeßschraube. Der Abstand der Eichlinien in Bild 3 entspricht jeweils gleichem Vorschub  $\Delta x$ .



Die Eichung wird zweckmäßig ohne Papier/Walze vorgenommen. Es empfiehlt sich, die Eichfunktion für einen größeren Bereich  $x$  aufzunehmen als an Eindringung zu erwarten ist. Durch die Stoßkräfte kann die Nulllinie in ihrer Lage etwas verschoben werden. Auf jeder Aufnahme muß sie daher mit sichtbar werden. Dies erreicht man durch Fotografieren des Oszillografenstrahles bei ruhiger Anlage des Druckelementes an Papier/Walze, Zurückdrehen des Films und nochmaliges Belichten des Bildes mit dem eigentlichen Stoßvorgang. Während und nach der Eichung der Anlage ist darauf zu achten, daß die Speisespannungen von Lichtquelle und Fotozelle ihren Wert genau beibehalten. Da dieses Verfahren sehr fremdlichtempfindlich ist, werden alle Teile in einem geschlossenen, innen geschwärzten Tubus untergebracht. Im Bewegungsbereich der Druckelementblende ist er geschlitzt (Bild 4). Wie eingangs erwähnt, sollen experimentell der fliegende und der ruhende Abdruck erfaßt werden. Für beide Aufgaben wird der gleiche Versuchsstand verwendet. Ein Teilstück einer handelsüblichen Hartgummwalze wird auf einer Welle drehbar gelagert. Die Kugellager der Welle sind in einem massiven Gestell eingelassen. Um mögliche Störschwingungen durch Laufunruhen des Antriebsmotors auszuschalten, wird dieser extern gelagert und mit einer Gummimanschette an die Welle angekoppelt. Durch die Rotation der Walze wird die beim fliegenden Druck senkrecht zur Stoßrichtung stehende Relativgeschwindigkeit des Aufzeichnungsträgers nachgebildet. Bei entsprechender Wahl des Potentiometers  $R$  aus Bild 2 ist die interne Verstärkungseinheit des verwendeten Zweikanaloszillografen OG 2 - 23 bzw. des Duoskops ausreichend. Da bei den Experimenten der freie Abdruck verwendet wird, liefern die Messungen im Gegensatz zum gebundenen Abdruck die reinen Stoßwerte, d.h. es brauchen in den Berechnungen die Eigenschaften des Antriebs nicht berücksichtigt zu werden. Außerdem sollen die Messungen nicht durch Einflüsse einer Druckelementführung beeinträchtigt werden. Als Resultat dieser Überlegungen findet sich die Ausbildung des Druckelementes als Pendelkörper (Bild 6). Bei der praktischen Ausführung zeigt sich, daß die von der Pendellänge und der Pendelkörpergestaltung abhängige Pendelmasse einen gewissen Wert nicht unterschreiten darf, um trotz bifilarer Aufhängung eine ruhige Bewegung ohne seitliches Flattern auszuführen. Als untere Grenze erwies sich hier eine Pendelmasse von etwa 20 g. Der Pendelgrundkörper wurde so gestaltet, daß durch Aufschieben kreiszylindrischer Hohlkörper die Gesamtpendelmasse in sieben Abstufungen auf 650 g gesteigert werden

konnte<sup>1)</sup>. Durch Verwendung von PVC-Material konnte der Grundkörper relativ massearm gestaltet werden, und außerdem ist damit erreicht worden, daß die Stoßwelle im Grundkörper auf Grund ihrer Laufzeit und ihrer geringen Intensität allgemein keinen Einfluß auf die Messung hat. Nur bei einer sehr langen Stoßdauer kann beobachtet werden, daß im Weg-Zeit-Verlauf wahrscheinlich durch die reflektierte Stoßwelle verursachte Unregelmäßigkeiten auftreten. Diese liegen aber am Ende der Kontaktdauer der Stoßkörper und sind stets gut erkennbar. Ein Beispiel einer solchen Unregelmäßigkeit zeigt Bild 7. Die Meßblende zur Wegerfassung wird auch aus den eben erwähnten Gründen zweckmäßig am vorderen Ende des Pendelkörpers, also unmittelbar in der Nähe der Kontaktstelle, befestigt. Es muß darauf geachtet werden, durch feste Anlage der Blende am Grundkörper ein durch die beim Stoß auftretenden starken Verzögerungen mögliches Schwingen der Blende in Stoßrichtung zu vermeiden (Bild 8). Durch die Möglichkeit, die aus Stahl hergestellten Druckmadeln leicht auszuwechseln, können verschiedene Formen und Durchmesser verwendet werden (siehe Tabelle 2). Am Gestell wird eine geeignete verstellbare Markierung angebracht für ein je nach  $\dot{x}_0$ -Wert gefordertes definiertes Auslenken der Pendelmasse.

#### 1.4.1.2. Messung der Verzögerung - $\ddot{x}(t)$

Die Verzögerung des Pendelkörpers wird mit Hilfe eines piezoelektrischen Schwingungsaufnehmers erfaßt, der an den Pendelgrundkörper unmittelbar vor der Wegmeßblende angeschraubt wird. Beide Meßgrößen werden damit am gleichen Ort des Grundkörpers abgegriffen (s. Bilder 6 und 8).

Im Gegensatz dazu sei die Meßanordnung zur Bestimmung der Abdruckkraft in /1/ erwähnt. Dort wird anstelle des Beschleunigungsgebers ein Druckaufnehmer verwendet. Dieser befindet sich unter dem Aufzeichnungsträger, stellt also praktisch die Papierunterlage dar. Damit wird einerseits die Möglichkeit ausgeschlossen, auch den Kraftverlauf für weiche Unterlagen (z.B. Gummiwalze) zu bestimmen, andererseits weicht die so ermittelte Stoßkraftfunktion wegen der elastisch-plastischen Eigenschaften des Papiers vom realen Verlauf mit zunehmender Papierschichtdicke immer mehr ab. Durch rechnerische Berücksichtigung dieses Umstandes auf den exakten Stoßkraft-Zeit-Verlauf zu schließen, scheint wegen der Unkenntnis der auch durch die Stoß-

<sup>1)</sup> Die theoretischen Ergebnisse der Stoßuntersuchungen müssen in einem möglichst breiten Stoßmassenbereich mit dem Experiment verglichen werden. Die Stoßmassen der Mosaikdruckwerke haben allerdings weit geringere Werte (s. Pkt. 1.4.1.2. und 1.4.1.3.).



kraftmessung selbst noch zu ermittelnden interessierenden mechanischen Kennwerte der Kombination Aufzeichnungsträger/Unterlage nicht möglich. Diese Gründe verdeutlichen die Notwendigkeit, die Stoßkraft durch Anbringen eines Beschleunigungsgebers am stoßenden Körper zu messen. Wegen der sehr geringen Massen der in der Praxis verwendeten Druckelemente ist dies dort versuchstechnisch nicht möglich. Die Umgehung dieses Problems wird in 1.4.1.3. dargelegt. Um den Grundkörper mit möglichst wenig Zusatzmasse zu belegen, wurde der Mikro-Beschleunigungsaufnehmer KD 91 mit der Masse von 1,8 g ausgewählt. Dieser einseitig gekoppelte Dickenschwinger ist weitgehend unempfindlich gegen Kabeleinwirkungen. Dies ist hier ebenso wichtig wie der geringe Querrichtungsfaktor, der stets unter 10 % liegt. Die Messungen wurden stets bei Raumtemperatur durchgeführt. Der Einfluß leichter Temperaturschwankungen ist vernachlässigbar. Zur fotografischen Registrierung wird das Meßsignal unter Vorschalten eines geeigneten Verstärkers (z.B. Typ M 60) gemeinsam mit dem Wegsignal einem Zweikanaloszillografen zugeführt. Es bietet sich aber auch die Möglichkeit, durch Ausnutzung der externen Vertikalablenkung eines Zweistrahloszillografen die Hysteresefunktion sofort aufzeichnen zu lassen. Es werden generell beide Varianten angewendet und zur Auswertung herangezogen (Bild 9). Die elektrische Integration der Funktion  $\ddot{x}(t)$  wird mit dem zum SM-System gehörenden Schwingungsmeßplatz SM 231 vorgenommen. Bei der Auswahl des Beschleunigungsaufnehmers ist natürlich auch auf die Einhaltung der Forderung nach einem hochabgestimmten System zu achten, d.h. die maximale Erregerfrequenz muß klein sein im Vergleich zur Aufnehmerresonanzfrequenz, um Amplituden- und Phasenverzerrung klein zu halten. Die maschinell oder auch numerisch durchgeführte Fourier-Analyse der Funktionen  $\ddot{x}(t)$  brachte das Ergebnis, daß besagte Forderung eingehalten wird. Die Verwendbarkeit des Meßergebnisses wird aber nicht nur durch die Aufnehmereigenschaften, sondern auch durch das System Aufnehmer-Verstärker beeinflusst. Dieses System ist durch ein RC-Glied darstellbar, wobei unter R der Eingangswiderstand des Verstärkers zu verstehen ist und C im wesentlichen die Summe aller inneren Kapazitäten des Beschleunigungsaufnehmers verkörpert. Es werden dadurch sowohl der Spitzenwert als auch die Dauer der sinusähnlichen Stoßbeanspruchung verfälscht /14/. Außerdem tritt je nach verwendetem Verstärker ein mehr oder minder starkes Überschwingen auf (Bild 10). Dieses gerätetechnisch bedingte Überschreiten des Nullniveaus ist nicht zu verwechseln mit dem in den positiven Bereich übergehenden Wert von  $\ddot{x}(t)$  als Eigenschaft der Lösung der Stoßdgl. (z.B. Bild 24).



In /14/ wird dargestellt, daß für Werte  $> 10$  des Verhältnisses Zeitkonstante  $R \cdot C$  zur Stoßdauer der Spitzenwertfehler bei Halbsinusstößen die 10 %-Grenze nicht überschreitet. Bei Verwendung des M 60 beträgt jener Verhältniswert etwa 10 bis 20. Damit ist auch die Zeitverfälschung vernachlässigbar. Die Aufnehmerresonanz wird bei diesem Stoß einer harten Nadel auf eine relativ weiche Gummiwalze nicht angeregt. Wird aber eine Aluminiumunterlage verwendet, kann dieser Effekt eintreten. Dies macht sich in einem stark verrauschten Meßsignal bemerkbar. Nicht brauchbare Meßaufnahmen können auf diese Weise leicht aussortiert werden. Wie bereits erwähnt, wird der Aufnehmer fest angeschraubt. Es ist dies die sicherste Befestigungsart gegen Ankopplungsresonanzen /15/.

Mit dem elektrodynamischen Eichtisch EET 101 erfolgte unter Einbeziehung der genannten verwendeten Verstärker eine Überprüfung des im Kennblatt des Aufnehmers angegebenen Übertragungsfaktors  $B_a$ . Im interessierenden Beschleunigungsbereich war dabei die vom Aufnehmer abgegebene Spannung streng linear abhängig von  $\ddot{x}$ . Der Aufnehmer kann hier also ohne Einschränkung in beiden Richtungen betrieben werden.

#### 1.4.1.3. Versuchsstand mit kleinen Stoßmassen

Da bei in der Praxis angewendeten Druckwerken schlagender Kontrasterzeugung die Masse eines Druckelementes noch weit unter der in 1.4.1.1. angegebenen Mindestmasse des Pendelkörpers liegt, wird mit den Untersuchungen am Stoßpendel der für die Drucktechnik eigentlich interessante Massebereich nicht erfaßt. Es ist daher ein zweiter Versuchsstand notwendig, der diesen Mangel behebt. Diese Behebung kann aber nur teilweise erfolgen, denn je kleiner die Druckmassen werden, desto schwieriger gestaltet sich die Anbringung eines Beschleunigungsgebers. Der nachfolgend beschriebene Versuchsaufbau gestattet daher nur die Registrierung der  $x(t)$ -Funktion. Bei der Auswertung der Ergebnisse wird dann geprüft, ob sich die hier gewonnenen Kennwerte (z.B. maximale Eindringung, Zeitdauer der Berührung) gut an die beim Pendelversuch ermittelten Werte anpassen. Ist dies der Fall, dann liegt die Vermutung nahe, daß diese Anpassung auch bei den aus der Kräftermessung resultierenden Kennwerten vorliegt. In der Auswertung wird dazu die Tatsache ausgenutzt, daß die Funktionen  $t_{\text{aus}}$ ,  $x_E$ ,  $-\ddot{x}_E$ ,  $t_{\ddot{x}_E}$ ,  $t_{\text{ab}} = f(m)$ , die bis zum Wert  $m = 20 \text{ g}$  aus den Experimenten am Pendelversuchsstand entnommen werden können, letztlich durch den Ursprung des Koordinatensystems verlaufen müssen (siehe Bild 13.3 in 1.5.1.). Da ein oder mehrere Wendepunkte im Verlauf der eben erwähnten Abhängigkeiten von  $m$  keine physikalische Erklärung finden können,

reichen Anstieg und Krümmung dieser Funktionen bei  $m = 20 \text{ g}$  einerseits aus zur Beurteilung der Güte der Messungen im Bereich  $m > 20 \text{ g}$  und sind andererseits anwendbar zur Extrapolation bis zum Nullwert (siehe Diagramme 2.2, 4.1.2, 5.3.1). Diese Funktionen können auch durch einfache analytische Ausdrücke approximiert werden. Den Aufbau des Versuchsstandes zeigt Bild 11. Es wurden das gleiche fotoelektrische Prinzip der Wegmessung und die gleiche drehbar gelagerte Walze verwendet, die unter 1.4.1.1. beschrieben sind. Lediglich anstelle des Fadenpendels treten auswechselbare, an Blattfedern aufgehängte, Stoßmassen. Eine solche Federführung ist zwar nicht reibungsfrei, aber die Federverluste liegen innerhalb der Meßunsicherheit. Die Federaufhängung war verschiebbar angeordnet, so daß der geeignete Ruheabstand des Druckelementes von Papier/Walze eingestellt werden konnte. Die Blattfedern dienen ausschließlich der Führung der Stoßmassen, ihre Steifigkeit in Stoßrichtung ist verschwindend gegenüber der von Walze/Papier. Die Stoßmassen reichen nach oben bis zu  $50 \text{ g}$  und damit in den Bereich der Pendelmassen (1.4.1.1.) hinein (Kontrolle und Vergleich). Die Erregung erfolgte manuell durch geeignete Schlagwirkung. Durch Auslenken und Loslassen wie beim Pendelversuch können hier nicht die erforderlichen Energien erzielt werden. Die Notwendigkeit der Schlagerregung ist ein weiterer Grund dafür, daß hier keine Beschleunigungsgeber aufgesetzt werden können. Die Aufprallgeschwindigkeit  $\dot{x}_0$  wird auch hier durch grafische Differentiation der  $x(t)$ -Funktion im Punkte  $t = 0$  ermittelt. Die in Bild 8 gezeigten verschiedenen Formen von Drucknadeln wurden auch hier eingesetzt.

#### 1.4.2. Meßprogramm und Fehlerbetrachtung

Das Meßprogramm ist entsprechend der in der Problemanalyse dargelegten Zielstellung aufgebaut. Die zu erarbeitenden Diagramme sollen in ihrer Gesamtheit die Möglichkeit bieten, die Abhängigkeiten aller drucktechnisch interessanten Parameter untereinander bestimmen zu können. Es sind dabei zwei Gruppen zu unterscheiden, nämlich

Parameter, die aus dem Zeitverhalten der Bewegungsgrößen ermittelt werden können (z.B. maximale Eindringung, Stoßdauer, beim Abdruck verbrauchte Energie)

und Parameter, die das Zeitverhalten der Bewegungsgrößen beeinflussen (z.B. Druckelementmasse, Papiersorte).

Während die Größen der ersten Gruppe auch untereinander in bestimmten Beziehungen stehen, können die der zweiten Gruppe nur mit denen der ersten korrelieren. Eine Übersicht zum Meßprogramm gibt Tab. 2,



in der ausschließlich Parameter der zweiten Gruppe erscheinen. Für jede der dort markierten Parameterkombinationen wurden daher die Bewegungsgrößen registriert und folgender Bearbeitungsgang eingehalten:

1. Aufzeichnen von  $x(t)$  und  $-\ddot{x}(t)$  unter Verwendung des M 60 und des OG 2 - 23; manuelles Eliminieren der Zeit  $t$  zur Ermittlung der Hysteresefunktion  $-\ddot{x}(x)$ .
2. Gleichzeitiges Registrieren von  $-\ddot{x}(x)$  auf dem Duoskop und unter Zuhilfenahme des SM 231 gleichfalls die Aufzeichnung wahlweise von  $x(t)$  zur Kontrolle oder von  $\dot{x}(t)$  zur Ermittlung der Energiebilanz durch zwei- bzw. einmaliges elektrisches Integrieren von  $\ddot{x}(t)$ .

In Bild 12 ist der Ablauf der Auswertung prinzipmäßig dargestellt. Daraus geht hervor, daß neben der Auswertung der Bewegungsgrößen auch eine Beurteilung der Qualitätsmerkmale des Abdrucks vorgenommen wird. Dazu gehören u.a. die Ausmessung der Verwischung (bei  $v_r \neq 0$ ) und die Begutachtung des Kontrastes des Druckpunktes sowohl auf dem Original (erste Lage) als auch auf allen Durchschlägen (ab Lage 2). Außerdem gehört dazu eine Einschätzung der Beanspruchung von Papier und Farbband. Bei fliegendem Abdruck kann ein Zerreißen, insbesondere des Papiers, und bei ruhendem Abdruck ( $v_r = 0$ ) ein Durchstoßen (Lochen) auftreten. Wiederum werden alle Lagen in die Betrachtung einbezogen. Wegen der möglichen starken Inhomogenitäten der Papierlagen unterliegen die Kennwerte der Bewegungsgrößen teilweise großen Schwankungen. Während für die drucktechnische Anwendung die Fälle  $\Lambda \geq 1$  interessant sind, werden daher für die Überprüfung der stoßtheoretischen Betrachtungen nur die Ergebnisse von  $\Lambda = 0$  herangezogen. Bei allen Messungen mit  $v_r = 0$  ist zu beachten (wegen der geforderten Genauigkeit besonders bei  $\Lambda = 0$ ), daß das Druckelement keinesfalls mehrere Male hintereinander den gleichen Bereich der Walzenoberfläche beansprucht. Die drehbar gelagerte Walze muß daher nach jedem Stoß weitergedreht werden.

Aus der Tabelle 2 ist zu erkennen, daß sich bei Abarbeitung des Meßprogramms eine sehr große Anzahl von Versuchsreihen ergibt. Der Aufwand für die fototechnische Registrierung der Ergebnisse sowie der unter optischer Vergrößerung ablaufenden Auswertung ist ebenfalls beträchtlich. Es ist unter solchen Bedingungen sinnvoll, bereits vor Beginn der Messungen über die Vertrauensgrenzen und letztlich damit über die notwendige Anzahl  $v$  der Meßwerte Klarheit zu gewinnen. Die  $v$  Meßwerte für die Stoßkenngrößen  $x_E$ ,  $\ddot{x}_E$ ,  $x_{ab}$ ,  $t_{ab}$ ,  $t_{xE}$ ,  $t_{\ddot{x}E}$ ,  $t_{aus}$  und  $\dot{x}_{00}$  werden in jedem Falle durch wiederholte definierte Auslenkung des Pendels und dem damit gleichen Wert  $\dot{x}_0$  der Auftreffgeschwindigkeit

erreicht. Die als Ergebnis genannten bzw. in den Diagrammen dargestellten Werte sind sämtlich arithmetische Mittelwerte  $a_m$  entsprechender Versuchsreihen. Die Anzahl der zur Mittelwertbildung verwendeten Meßwerte wurde generell mit  $\nu = 6$ , lediglich im Teilprogramm  $\Lambda = \nu_r = 0$  (siehe Pkt. 1.4.3.1.) mit  $\nu = 10$  festgesetzt. Dabei muß allerdings erwähnt werden, daß die wahre Anzahl der Messungen fast stets höher lag. Es wurden dann jeweils nur die sechs bzw. zehn Werte der Meßreihe zur Mittelwertbildung verwendet, bei denen für die Varianz  $\bar{s}^2$  die Bedingungen

$$\begin{aligned} \bar{s}^2 &\leq 0,9 a_m^2 \cdot 10^{-2} \text{ für } \nu = 6 \\ \text{bzw. } \bar{s}^2 &\leq 1,9 a_m^2 \cdot 10^{-2} \text{ für } \nu = 10 \end{aligned}$$

erfüllt waren. Dabei wird eine statistische Sicherheit von 95 % zugrunde gelegt (die Studentsche t-Verteilung ist in TGL O-1319 tabelliert) sowie garantiert, daß keiner der verwendeten Meßwerte mehr als 10 % vom arithmetischen Mittelwert abweicht. Diese Bestimmung der Varianz wurde in jedem Falle durchgeführt, ausgenommen dann, wenn in der Ergebnisdarstellung die Streubereiche bzw. die einzelnen Meßwerte extra angegeben sind (bei Messungen mit relativ starken Streuungen, z.B. bei der Abhängigkeit der o.g. Stoßkenngrößen von  $\nu_r$  (D 4.3, 4.6, 4.7, 5.5)). Durch die vor jeder - entsprechend der Felder  $F_{ij}$  in Tabelle 2 - neu eingestellten Parameterkombination durchgeführte erneute Eichung der Meßeinrichtung sind erfaßbare systematische Fehler ausgeschlossen. Im Sinne der o.g. TGL kann hier von sog. Wiederhol-Bedingungen ausgegangen werden.

#### 1.4.3. Versuchsergebnisse

Die Experimente sind unter zwei verschiedenen Aspekten zu sehen. Sie dienen einerseits der Beurteilung der Berechnungsmethoden zum Stoßvorgang - gehen also über das Anwendungsgebiet der Drucktechnik hinaus und werden daher z.T. ohne Papier und Farbband meist bei der Relativgeschwindigkeit  $\nu_r = 0$  durchgeführt - und andererseits dem Erkennen der Relationen verschiedener drucktechnischer Parameter untereinander.

Die Experimente sind streng nach dem Meßprogramm der Tabelle 2 durchgeführt worden. Generell wurde dabei von den in Bild 12 dargestellten Vergleichsmöglichkeiten der Messungen Gebrauch gemacht. Sich dadurch wiederholende Parameterkombinationen wurden erneut eingestellt und als weitere Kontrollmöglichkeit angesehen. Dies erwies sich wegen der teilweise großen Zeitspannen zwischen den Experimenten als sehr vorteilhaft.

#### 1.4.3.1. Ohne Papier und Farbband; Gummiwalze

Da Papier und Farbband keine homogenen Materialien darstellen, liegt es nahe, die wegen der nachfolgenden theoretischen Erfassung notwendigerweise sehr exakt durchzuführenden Stoßexperimente unter Ausschaltung dieser zusätzlichen Störgrößenquelle durchzuführen. Zur Nachbildung des zentrischen Stoßes eines inkompressiblen Körpers gegen eine feste teilelastische Wand kommen also die Parameterkombinationen der Felder  $F_{12}$ ,  $F_{14}$ ,  $F_{16}$ ,  $F_{18}$  und  $F_{110}$  aus Tabelle 2 in Betracht. Es werden damit verschiedene geometrische Formen und Abmessungen des stoßenden Körpers im Bereich der Stoßstelle, unterschiedliche stoßende Massen und Stoßgeschwindigkeiten ebenso erfaßt wie Relativgeschwindigkeiten  $v_r \geq 0$ . Wegen der Bedeutung der Meßwerte wurde im Teilprogramm  $v_r = \Lambda = 0$  die Anzahl der Wiederholmessungen für jeden  $\dot{x}_0$ -Wert generell mit zehn festgesetzt (mit Ausnahme der Versuche der Kennziffern 0,1 und 2 des Feldes  $F_{12}$  (siehe Tabelle 2)).

Jede der gewonnenen fotografischen Aufnahmen wurde ausgewertet. In Diagramm D 1 ist ein Beispiel der Kombinationen von  $F_{12}$  mit  $m = 125$  g und  $v_r = \Lambda = 0$  dargestellt. Man sieht, daß bereits für diese eine Kombination 50 Einstellungen vorzunehmen waren und damit 150 Aufnahmen ausgewertet werden mußten. Für das gesamte Feld  $F_{12}$  ergaben sich annähernd 3000 Einstellungen. Die Notwendigkeit einer starken Einschränkung der Anzahl der Kombinationen wird deutlich.

In den Kurven von D 1 sind charakteristische Größen des Stoßvorganges zu erkennen, die in Bild 13.3 unter 1.5.1. zusammengestellt sind. Zu ergänzen ist lediglich die Energiedissipation  $\Delta W_s$ . Dies ist der Teil der Aufprallenergie  $W_0$  des Druckelementes, der während des Stoßes durch die Verformung des gestoßenen Körpers in andere Energieformen umgesetzt wird.

Zunächst wurde die maximale Eindringung  $x_E$  des Druckelementes betrachtet. Für den Fall ruhenden Abdruckes und eines zylinderförmigen Druckelementes mit  $d = 0,3$  mm zeigt D 2.1 die Abhängigkeit  $x_E = x_E(\dot{x}_0)$  für verschiedene  $m$ . Dem wird in D 2.2  $x_E = x_E(m)$  für unterschiedliche  $\dot{x}_0$  gegenübergestellt. Es ist logisch, daß in beiden Darstellungen die  $x_E$ -Werte mit steigenden Abzissenwerten wachsen, da praktisch  $W_0$  vergrößert wird. Wie zu erwarten war, ordnen sich die Meßpunkte nach Versuch Bild 11 gut in die Schar der Meßpunkte des Pendelversuches ein. Die Energieverluste durch die Führungsfedern sind also zu vernachlässigen (die Federsteifigkeit in Verformungsrichtung der Blattfeder wurde sehr gering gehalten). Interessant ist die Fragestellung, wie  $x_E$  bei konstantem  $W_0 = \frac{m}{2} \dot{x}_0^2$  von dem Verhältnis  $V = m/\dot{x}_0 = 2 W_0/\dot{x}_0^3$  abhängt. Aus den Betrachtungen unter 1.5. wird deutlich, daß auf Grund



der mit  $\dot{x}_0$  wachsenden Dämpfungskräfte geringere  $x_E$  bei sinkenden Werten  $m/\dot{x}_0$  zu erwarten sind. Tatsächlich ist diese Tendenz auch z.T. zu beobachten. Die Änderungen der  $x_E$ -Werte liegen aber teilweise im Unsicherheitsbereich der Meßwerte, so daß eindeutige experimentelle Nachweise hier nicht zu verzeichnen sind. D 2.3 zeigt dies für fünf Werte  $W_0$ . Die verwendeten Meßpunkte sind z.T. in D 2.1 markiert. Weiteren Einblick vermittelt D 2.4. Es ist zu erkennen, daß hier  $\Delta W_s$  im betrachteten Bereich als unabhängig vom Verhältnis  $V = m/\dot{x}_0$  angesehen werden kann. Theoretische Betrachtung liefert den gestrichelt gezeichneten Verlauf. Wird  $V$  sehr groß, dann tritt quasistatische Verformung ein, bei der die Dämpfung verschwindend wird. Bei "Beschuß" der teilelastischen Wand mit äußerst massearmen Stoßelementen muß die Funktion in der gezeigten Weise die Ordinate bei  $\Delta W_s = W_0$  schneiden. Es müßten dann in der Kompressionsphase die Stoßkräfte mit sinkenden Werten  $V$  über  $x$  zunehmen (D 2.4.2). Da aber gerade die Stoßkräfte (Gesamtgegenkräfte  $F_G = -m\ddot{x}$ ) bzw. die spezifischen Werte  $F_G/A$  für den Kontrast des Druckpunktes (Herauspressen des Farbstoffes aus dem Farbband) verantwortlich sind, werden diese Probleme unter 1.4.3.2. behandelt. Schließlich wird in D 2.5  $x_E$  in Abhängigkeit von  $W_0$  dargestellt. Im schraffierten Bereich liegen alle Meßpunkte für  $0 \leq \Lambda \leq 5$  mit z.T. starken Streuungen bei  $\Lambda > 0$  verteilt. Von Interesse ist ebenfalls die Abhängigkeit der maximalen Eindringung von Form und Druckfläche des stoßenden Körpers.

Entsprechend Tabelle 2 wurden die Bewegungs-Zeit-Funktionen für die fünf verschiedenen Druckelemente aufgezeichnet. Es genügt, dies nur für drei Stoßmassen durchzuführen, da sich die  $x_E$ -Werte im Verhältnis untereinander auch für andere Massen nicht wesentlich ändern (D 2.3). Wird die kreiszylindrische Form des Druckelementes beibehalten, dann ändern sich mit den Druckflächen  $A$  auch die Steifigkeit und das Dämpfungsvermögen (s. D 8.1) des gestoßenen Körpers. Das Dämpfungsvermögen  $\gamma$  wächst proportional dem bewegten Masseanteil des gestoßenen Körpers (vergl. 1.5.1.1. und 3.3.), bei zylindrischen Druckelementen also ist  $\gamma$  etwa proportional  $A$ . Für gleiche Eindringtiefen ändert sich der elastische Kraftanteil im gleichen Verhältnis wie die Druckflächen. Der Anstieg der Funktionen  $x_E = x_E(W_0)$  wird also in jedem Punkt mit steigendem  $d$  stetig kleinere Werte annehmen. Die Unterschiede zwischen den Druckelementen 0,3 mm-Zylinder, Kegelstumpf und Kugel sind nicht relevant (D 2.6). Den Einfluß der Relativgeschwindigkeit  $v_r$  auf  $x_E$  zeigt D 2.7. Die Messungen beschränken sich auf das Feld  $F_{12}$  der Tabelle 2. Dabei ist die Einschränkung zu machen, daß wegen mangelnder Führung der Druckelemente beim Versuch nach Bild 11

nur der Pendelversuch heranzuziehen war. Die Walze rotierte dabei so, daß die Pendelfäden auf Zug belastet wurden. Ein Auswandern des Druckelementes ist so ausgeschlossen. Mit wachsenden Werten  $v_r$  sinkt erwartungsgemäß für  $W_0 = \text{const.}$  die maximale Eindringung. An der Berührungsfläche des Druckelementes mit dem Material des gestoßenen Körpers treten mit  $v_r$  wachsende zusätzliche Reibungskräfte auf. Diese Reibungskräfte bewirken damit auch ein Absinken der Extremwerte der Stoßkraft. In D 3.1 wird dies bestätigt. Andererseits ist aus D 1 ersichtlich, daß  $|\ddot{m}x_E|$  mit steigenden Werten  $\dot{x}_0$  ebenfalls wächst. Das bedeutet, daß mit  $v_r$  auch  $W_0$  entsprechend erhöht werden muß, wenn der Extremwert der Stoßkraft nicht sinken soll. In der drucktechnischen Anwendung ist dies von Bedeutung (D 5.6). D 3.2 zeigt stellvertretend für alle Parameterkombinationen den Einfluß von  $\dot{x}_0$  auf  $-\ddot{m}x_E$ . Diese Funktion ist - wie auch in /1/ beschrieben - mit genügender Genauigkeit als quadratische Parabel anzusehen. Auch bei  $|\ddot{m}x_E|$  konnte teilweise ein Einfluß der Verhältniszahl  $V$  beobachtet werden (entsprechend D 2.4.2). Ebenso wie in D 2.3 sind aber auch hier eindeutige Aussagen nicht zu treffen. Daher wird später in D 5.10 der Verlauf von  $-\ddot{m}x_E$  unabhängig von  $V$  über  $W_0$  dargestellt. Wie unter 1.4.1.3. beschrieben, kann die Funktion zwischen dem kleinsten  $W_0$ -Wert und dem Koordinatenursprung interpoliert werden, zumal sich bei allen Kennwerten der  $x(t)$ -Funktion gute Übereinstimmung und Anpassung der Werte nach beiden Versuchen gemäß Bild 6 und Bild 11 zeigen.

Von den sechs in Bild 13.3 erläuterten Zeitgrößen ist  $t_w$  die einzige, die nicht gemessen worden ist. Stoßtheoretisch und drucktechnisch ist  $t_w$  von keiner großen Bedeutung. Wesentlich interessanter sind  $t_{\text{aus}}$  und  $t_{\text{ab}}$ . Die Bedeutung von  $t_{\text{aus}}$  liegt mehr auf der drucktechnischen Anwendung und wird daher unter 1.4.3.2. behandelt (D 5). Dagegen gibt  $t_{\text{ab}}$  das eigentliche Ende des Stoßes an und ist daher stoßtheoretisch von gewichtigem Interesse. Im Gegensatz zu den Werten von Eindringung und Verzögerung hängen die charakteristischen Zeitwerte bei einem bestimmten  $W_0$  stark vom Verhältnis  $V$  ab. Sofort deutlich wird dies bei  $t_{x_E}$  (Bild 13.1).

In D 4.1.1 wird  $t_{\text{ab}}$  als Funktion von  $\dot{x}_0$  dargestellt. Als wichtiges Ergebnis ist festzuhalten, daß  $t_{\text{ab}}$  monoton mit wachsenden Werten  $\dot{x}_0$  abnimmt. Die Stoßdauer  $t_{\text{ab}}$  wird also mit steigender Auftreffgeschwindigkeit immer kürzer. Es gilt also  $t_{\text{ab}} \sim \frac{1}{\dot{x}_0} \quad \forall m, W_0 = \text{const.}$  (vergl. /1/), wobei der Proportionalitätsfaktor aber verschiedene Werte annimmt, je nachdem, ob  $m$  oder  $W_0$  konstant gehalten wird. Die Kurve wird sich im nichterfaßten Bereich an die Koordinatenachsen anschmiegen, wobei sehr kleine  $\dot{x}_0$ -Werte eigentlich gar keinen Stoß mehr ver-



körpern und demzufolge uninteressant sind. Aus D 4.1.1 kann D 4.1.2 gewonnen werden. Es bestätigt sich die auch in /1/ beschriebene Tatsache, daß  $t_{ab} \sim \sqrt{m}$ . Da aber stets  $t_{ab} < t_{aus}$ , ist es falsch, wenn dort  $t_{ab}$  als die wesentliche Größe für die drucktechnische Anwendung ausgewiesen wird. Wie schon erwähnt, hat  $t_{ab}$  stoßtheoretische Bedeutung. Auf Versuche mit verschiedenen  $\Lambda$ -Werten kann daher verzichtet werden.

Die Vergrößerung des Durchmessers des zylindrischen Druckelementes hat auf den Stoßvorgang den gleichen Einfluß, als würde die Steifigkeit des gestoßenen Körpers erhöht.

Aus D 4.2 ist zu erkennen, daß mit wachsender Steifigkeit die Werte  $t_{ab}$  kleiner werden. Das entspricht der Erfahrung, daß die Stoßdauer mit härteren Materialien der Stoßkörper abnimmt. Auch hier sind die Koordinatenachsen Asymptoten der Funktionen. Schließlich zeigt D 4.3 die prinzipielle Abhängigkeit der Stoßdauer von der Relativgeschwindigkeit. Die Pendelmasse wurde unter Variation von  $v_r$  mit verschiedenen Geschwindigkeiten  $\dot{x}_0$  auf die Walze geschlagen. Das Stoßsystem verhält sich genauso, als würde statt der Erhöhung von  $v_r$  eine Verkleinerung von  $\dot{x}_0$  bei  $v_r = \text{const.}$  vorgenommen:  $t_{ab}$  nimmt mit  $v_r$  zu (vergl. D 4.1.1). Aus D 4.3 ist außerdem zu erkennen, daß mit kleiner werdender Masse und (teilweise) steigenden Werten  $\dot{x}_0$  die Meßwertstreuungen anwachsen. Verständlicherweise ist dies auch generell bei steigenden Werten  $v_r$  zu konstatieren. Schließlich zeigt D 4.3 noch, daß  $t_{ab}$  mit  $v_r$  umso schneller anwächst, je kleiner  $m$  und je größer  $\dot{x}_0$  werden.

Wie  $t_{x_E}$  ist auch der Zeitpunkt  $t_{\ddot{x}_E}$  des Extremwertes  $-\ddot{x}_E$  abhängig von den Größen  $\dot{x}_0$ ,  $A$  und  $v_r$ . Es wird so verfahren, daß die Abhängigkeit beider Zeitwerte  $t_{x_E}$  und  $t_{\ddot{x}_E}$  von einer der drei genannten Größen in einem Diagramm dargestellt wird. So ist man in der Lage, gleichzeitig die Differenz  $\Delta t = t_{x_E} - t_{\ddot{x}_E}$  zu beobachten. Es steht  $\Delta t$  in direktem Zusammenhang mit den Dämpfungswerten  $k^*$  bzw.  $\gamma$  (siehe 1.5.1.1.). Gehen  $k^*$  bzw.  $\gamma$  gegen Null, verschwindet auch  $\Delta t$ . Der exakte Zusammenhang ist erst zu ermitteln, wenn die analytischen Ausdrücke für  $x(t)$  und  $-\ddot{x}(t)$  bekannt sind (vergl. auch Glg. (49)). Auf Grund der Tatsache, daß die Stoßdauer mit wachsenden Werten  $\dot{x}_0$  abnimmt (D 4.1.1), ist zu erwarten, daß auch  $t_{\ddot{x}_E}$  dieses Verhalten zeigt. In D 1 wird dies qualitativ bestätigt und in D 4.4 exakt dargestellt. Die Koordinatenachsen bilden die Asymptoten der Funktion, wobei kleine Werte  $\dot{x}_0$  wie bei D 4.1.1 uninteressant sind. Mit wachsenden Werten  $\dot{x}_0$  nimmt auch  $x_E$  zu (D 2.5) und auf Grund des Aufbaus der Gummiwalze (die etwa 3 mm dicke, auf einem Stahlrohr aufgetragene Hartgummischicht wird unter



der Kontaktfläche des Stoßkörpers zusammengedrückt) zeigt deren Federsteifigkeit in Abhängigkeit von  $x$  sicher einen progressiven Verlauf (wird in D 8.6 bestätigt). Es zeigt sich nun, daß die Stoßkurven bei verschiedenen Werten  $x_0$  stets so liegen, daß auch  $t_{xE}$  mit wachsendem  $x_0$  abnimmt. Dies ist ebenfalls aus dem Beispiel in D 1 ersichtlich. Bild 13.2 verdeutlicht den Sachverhalt. Damit zeigen  $t_{xE}$  und  $t_{\ddot{x}E}$  gleiches Verhalten wie  $t_{ab}$ . Ebenfalls kleinere Werte  $t_{xE}$  stellen sich ein, wenn die Kontaktfläche  $A$  vergrößert wird (D 4.5). Als Erklärung kann die von D 4.2 herangezogen werden. Dagegen ist bei  $t_{\ddot{x}E}(A)$  zu beobachten, daß sich eine Veränderung von  $A$  (jedenfalls in dem hier betrachteten Bereich) kaum auf  $t_{\ddot{x}E}$  auswirkt. Die Werte schwanken mehr oder weniger um die eingezeichnete, fast parallel zur  $A$ -Achse liegende Gerade. Ebenso wie die in den vorangegangenen Diagrammen gezeigten Abhängigkeiten wird auch  $t_{xE}$ ,  $t_{\ddot{x}E}(A)$  unter 1.5.1.3. durch Nachbildung an einem Analogrechner qualitativ bestätigt. Schließlich bleibt noch  $t_{xE}$ ,  $t_{\ddot{x}E}(v_r)$  zu untersuchen. D 4.6 zeigt die aus Versuchen ermittelten Werte. Es ist ein leichter Anstieg der Funktionen festzustellen. Daß  $t_{\ddot{x}E}$  zumindest nicht abnimmt, war auch zu erwarten, da  $t_{ab}$  mit  $v_r$  ansteigt (D 4.3). Formell ergibt sich aus  $\gamma \approx \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\Delta W_s}{W_0}$  und  $t_{xE} \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta t}{\gamma}$ , ausgehend von den experimentell aufgenommenen Abhängigkeiten  $\Delta W_s(v_r)$  in D 6.3.1. und  $\Delta t(v_r)$  in D 4.7, daß  $t_{xE}$  kleiner wird mit wachsendem  $v_r$ . Dieser Widerspruch zu D 4.6 erklärt sich daraus, daß obige formelle Umrechnung hier ungültig ist, denn  $\Delta W_s$  resultiert hier aus Reibungskräften, die quer zur Stoßrichtung wirken. Mit der Materialdämpfung  $\gamma$  steht also  $\Delta W_s$  für  $v_r > 0$  in keinem Zusammenhang. Die Zeitdifferenz  $\Delta t = t_{xE} - t_{\ddot{x}E}$  steht in direktem Zusammenhang mit der Dämpfung  $D$  des Materials (siehe 1.5.1.1.):  $\Delta t \sim \gamma$ . Würde  $D$  verschwinden, dann ginge auch  $\Delta t$  gegen Null. Dies passiert, wenn entweder  $k$  oder  $f(x)$  den Wert Null annehmen (Glg. 20). Nun ist aber  $k > 0$  gesichert. Daher bleibt nur noch die zweite Möglichkeit. Es ist  $f(0) = 0$ . Wenn also, wie unter 1.5.1.2. angenommen, ab Stoßbeginn Walze und Stoßelement fest verbunden wären, dann haben die Kurven  $x(t)$  und  $-\ddot{x}(t)$  stets bei  $x = 0$  die gleiche Phasenlage (siehe z.B. Bild 28.1). Es wird  $\Delta t$  wahrscheinlich die maximale Phasenverschiebung zwischen Kraft- und Wegfunktion darstellen. Genau ist dies erst zu entscheiden, wenn die analytischen Ausdrücke für  $x(t)$  und  $-\ddot{x}(t)$  bekannt sind. Auf Grund der Aussagen unter 1.5.1.2. ist zu erwarten, daß  $\gamma$  mit steigenden Werten  $x_E$  ebenfalls zunimmt. Aus Bild 16 ist aber außerdem zu erkennen, daß die Größe des Verlustwinkels  $\gamma \sim \Delta t$  auch von der Länge des Federkraftzeigers, also vom Betrag der Federkraft, beeinflusst wird. Werden bei gleichem Dämpfungskraftgesetz verschiedene

Federkraftgesetze betrachtet (linear, quadratisch und kubisch in  $q$ ), dann ist zu erwarten, daß  $\Delta t$  mit steigendem Exponenten im Federkraftgesetz immer mehr dahin tendiert, mit steigendem  $q$  abzunehmen. Dies bestätigen die Bilder 28, die mit einer Analogrechenanlage aufgenommen wurden (s. 1.5.1.3.). Während bei linearer Federcharakteristik  $\Delta t$  mit steigenden Ausschlagwerten noch zunimmt, zeigt sich bereits bei quadratischer Federcharakteristik, daß  $\Delta t$  vom Ausschlag nur wenig beeinflusst wird. Schließlich weist  $\Delta t$  bei kubischem Federkraftgesetz eindeutig fallende Tendenz auf. Die Tatsache, daß die Hysteresefläche, d.h. die Verlustenergie, trotzdem in allen Fällen mit  $q$  ansteigt (Bilder 28), zeigt, daß der Proportionalitätsfaktor in der "Proportion"  $\gamma \sim \Delta t$  (s. Glg. (48.1)) mit  $q$  noch stärker ansteigen muß. Tatsächlich ist aus den gleichen Bildern erkennbar, daß  $t_{xE}$  mit wachsendem  $q$  umso schneller kleinere Werte annimmt, je größer der Exponent im Federkraftgesetz ist. Der Proportionalitätsfaktor  $\pi/2 t_{xE}$  ist also keine Konstante, sondern selbst von  $q$  abhängig (s. D 4.4  $t_{xE} = t_{xE}(\dot{x}_0)$ ). In D 4.7 sind die Abhängigkeiten  $\Delta t = \Delta t(\dot{x}_0, m, v_r, d \text{ bzw. } A)$  zusammengefaßt. Eine Extrapolation zum Abszissenwert Null ist bei den Variablen  $\dot{x}_0$  und  $d$  nicht möglich. Für  $\dot{x}_0$  wäre sie stoßtheoretisch ohne Bedeutung. Gehen  $d$  bzw.  $A$  gegen Null, ändert sich die Federsteifigkeit der gestoßenen Schicht und damit  $\Delta t$ . Die Unsicherheit aber besteht darin, daß mit kleineren Werten  $A$  die Gefahr einer Verletzung der Oberfläche der gestoßenen Schicht wächst.

#### 1.4.3.2. Auswertung unter drucktechnischen Aspekten

Für die schlagende Kontrasterzeugung hat neben den Abhängigkeiten  $-m\ddot{x}_E$ ,  $x_E$ ,  $Z(W_0, A, v_r, \Lambda)$  vor allem die Frage nach der möglichen Druckfrequenz Bedeutung. Die Druckfrequenz wird bestimmt von der Zeit  $t_{\text{aus}}$  (siehe Bild 13). Hinzu kommen die Bestimmung der erforderlichen Aufprallenergie  $W_{\text{oerf}}(\Lambda, A, v_r)$  und die Ermittlung der Verluste  $\Delta W_s(\Lambda, A, v_r)$ . Variiert werden dabei stets die Papiersorte, das Farbband und die Schreibwalze (Gummibelag, Metall). Zwischen den einzelnen Darstellungen können natürlich Querverbindungen hergestellt werden, die weitere Aussagen ermöglichen, so z.B. von  $W_{\text{oerf}}(\Lambda, A)$  zu  $-m\ddot{x}_E(\Lambda, A)$ . Für  $\Lambda = 1$  wird so die Flächenpressung zwischen Druckelement und Farbband ermittelt, bei der der Farbstoff gerade aus dem Farbband austritt. Das zugehörige  $W_{\text{oerf}}$  stellt den minimalen Wert für die jeweilige Kontaktfläche dar. Für die hier angegebenen Werte  $t_{\text{aus}}$  muß beachtet werden, daß stets nur die freie Kontrasterzeugung (siehe Tabelle 1) zur Anwen-



dung kam. Ist das Druckelement mit einem Rückholmechanismus verbunden (z.B. einer Feder), dann besitzen die Zeiten  $t_{\text{aus}}$  natürlich andere Werte. Sofern dieser Rückholmechanismus die Zeit  $t_{\text{aus}}$  nicht vergrößert, was auch nicht zu erwarten ist, geben die hier angegebenen Werte  $t_{\text{aus}}$  der freien Kontrasterzeugung die obere Grenze an. Sie können also bei der Konzipierung von Druckwerken generell als Richtwerte herangezogen werden. Diagramm 5.1 zeigt die Abhängigkeit der Zeiten  $t_{\text{aus}}$  von der Lagenzahl  $\Lambda$  und der Auftreffenergie  $W_0$  bei konstant gehaltenen Werten  $d$ ,  $m$  und  $v_r$ . Mit  $\Lambda$  steigt die Dämpfung und sinkt die Steifigkeit des Systems Papier/Walze. In beiden Fällen muß sich  $t_{\text{aus}}$  erhöhen. Dies wird in D 5.2.1, was aus D 5.1 hervorgeht, bestätigt. Zur theoretischen Absicherung zeigt D 5.2.2 die Tendenzen, die sich aus der Auswertung an einer Analogrechenanlage ergeben (siehe 1.5.1.3.). Es kann  $t_{\text{aus}}$  dort nicht unmittelbar abgegriffen werden, sondern ergibt sich erst als Schnittpunkt der  $t$ -Achse mit der Tangente, die bei  $t_{\text{ab}}$  an  $x(t)$  angelegt wird. Es bestätigen sich in allen Fällen die experimentellen Ergebnisse. Aus den Versuchsergebnissen zeigt sich, daß  $t_{\text{aus}}$  stark abhängig ist vom Verhältnis  $V = \frac{m}{x_0}$ .

D 5.3.1 zeigt aus den Versuchen nach Bild 6 und 11 gewonnene Ergebnisse, die praktisch eine Zusammenfassung mehrerer Diagramme nach Beispiel D 5.1 für verschiedene Massen  $m$  darstellen. Durch die Streuungen liegen die Meßwerte für die einzelnen Massen innerhalb des markierten Wertebereichs teilweise ungeordnet verteilt. Aus D 5.1 ist auch zu erkennen, daß die Werte  $t_{\text{aus}}$  für die Kurve  $\Lambda = 1$  mit Farbband nicht wesentlich über denen bei  $\Lambda = 1$  ohne Farbband liegen. Das bedeutet, daß ein Wegfall des Farbbandes (z.B. bei selbstschreibenden Papieren oder eingefärbtem Druckelement) keine nennenswerten Zeitvorteile bringt. Zudem schwindet dieser geringe Zeitunterschied noch mit steigender Zahl  $\Lambda$ . Ein signifikanter Unterschied zwischen den Werten  $t_{\text{aus}}$  bei Verwendung des Baumwollbandes gegenüber dem Seideband konnte nicht festgestellt werden. Ebenso verhält es sich beim Vergleich der beiden verwendeten Papiersorten. Aus D 5.1 wird deutlich, daß die  $t_{\text{aus}}$ -Werte bei Verwendung einer Karteikarte im Bereich derer von  $\Lambda = 3$  liegen. Im Diagramm 5.3.2 sind die Werte für  $m = 5$  g als der in diesem Zusammenhang kleinsten verwendeten Masse gesondert dargestellt. Diagramm 5.4 zeigt den Vergleich der Meßwerte für eine bestimmte Parameterkombination bei Verwendung von Aluminium- und Gummiwalze. Die Unterschiede sind deutlich. Während bei der Gummiwalze mit Erhöhung der Aufschlagenergie in immer stärkerem Maße der elastische Einfluß dieser

Hartgummischicht zur Geltung kommt und die Werte  $t_{\text{aus}}$  absinken läßt, bewirkt die zum Gummi vergleichsweise sehr harte Metallunterlage Aluminium, daß bei kleineren Werten  $W_0$  im wesentlichen die Papierschicht den Bewegungsablauf des Druckelementes bestimmt. Die Folge davon ist, daß zunächst die Werte  $t_{\text{aus}}$  mit  $W_0$  zunehmen. Das Papier wird stärker deformiert und die Energieverluste steigen, während elastische Anteile nicht hinzukommen. Die Meßwerte können - gerade bei großen Werten  $\Lambda$  - auch z.T. verfälscht werden, wenn sich das Druckelement im deformierten Papier "verhakt". Steigt  $W_0$  über einen gewissen von  $\Lambda$  abhängigen Wert an, dann wird das Papier stets maximal komprimiert. Die vom Papier verursachten Energieverluste nehmen nicht mehr zu, sondern bleiben konstant. Steigen die Werte  $W_0$  weiter an, tritt der gleiche Effekt wie bei der Gummwalze ein und  $t_{\text{aus}}$  geht leicht zurück. Dieses Maximum der  $t_{\text{aus}}$ -Kurve ist  $\Lambda$ -abhängig. Mit steigenden Werten  $\Lambda$  wird die Streuung der Meßwerte immer größer. Letzteres gilt auch für große  $\Lambda$ -Werte bei Erhöhung der Relativgeschwindigkeit  $v_r$ . In D 5.5 ist zusätzlich noch die Abhängigkeit  $t_{\text{aus}}$  (d) dargestellt. Verhakungen des Druckelementes treten für  $v_r > 0$  in immer stärkerem Maße in Erscheinung, je größer die  $\Lambda$ -Werte werden. Damit sinkt die Zuverlässigkeit der Meßwerte in diesem Bereich.

Es war zu erwarten (vergl. D 4.2 und D 4.3), daß auch für  $\Lambda > 0$  die gleichen Tendenzen wie bei  $t_{\text{ab}}$  (d,  $v_r$ ) zu verzeichnen sind. Der Zeitpunkt  $t_{\text{aus}}$  (sein Wert wird natürlich wesentlich von einer eventuell angebrachten Rückholfeder bestimmt) ist nicht nur bestimmend für die mögliche Druckfrequenz, sondern auch verantwortlich für die Verwischung  $Z$  des Druckzeichens in Richtung der Relativgeschwindigkeit  $v_r$ . Die Zeichenausgabegeschwindigkeit auch bei Seriendruckwerken liegt meist so hoch, daß man auf Grund der steti-gen Vorwärtsbewegung der Druckelementhalterung (Druckkopf) ohne eine Gegenschwenkbewegung des Druckkopfes nicht auskommt, da sonst die Verwischung erheblich wäre. Dieses Prinzip der Gegenschwenkbewegung des Druckkopfes ist allgemein bekannt und reduziert  $v_r$  auf einen Wert nahe Null. Die Ermittlung der Verwischung im Versuch ohne Gegenschwenkbewegung ist daher eigentlich gar nicht mehr interessant. Man kann sie nach  $Z = t_{\text{aus}} \cdot v_r$  berechnen oder direkt am Ausdruck ausmessen. Die zulässige Größe von  $Z$  muß festgelegt werden und richtet sich nach Zeichengröße und -form sowie nach d. Im Gegensatz zu  $W_{\text{oerf}}$  ist  $Z$  wegen der Proportionalität zu  $t_{\text{aus}}$   $V$ -abhängig und wird natürlich auch von der Konstruktion des Druckwerkes (Rückholfeder, verwendetes Gummimaterial für Schreibwalze, Druck-

fläche A etc.) beeinflusst. Für die Aufnahme der in D 5.6 angegebenen Verwischungsgrenze wurde der Versuchsaufbau nach Bild 11 leicht abgeändert und eine stärkere Rückholfeder verwendet. Aus dem Übersichtsdiagramm 5.6 sind die Grenzen für den Einsatz eines Mosaikdruckwerkes erkennbar. Es zeigt sich, daß bei Beachtung der Verwischung, der Zerstörung der obersten Papierlage und des notwendigen Kontrastes auf der untersten Papierlage nur ein begrenzter Bereich zur Verfügung steht. Es bestätigt sich die Tendenz, daß sich mit steigendem  $\Lambda$  die zulässige Größe von Z zu kleineren  $v_r$ -Werten verlagert (vgl. D 5.5). In D 5.6 werden die Angaben zu  $W_{\text{oerf}}$  aus D 5.3.1 auf Relativgeschwindigkeiten  $v_r > 0$  ausgedehnt. Die Werte  $W_{\text{oerf}}$  wurden so bestimmt, daß sich der Druckpunkt aus einer Entfernung von etwa 30 cm noch deutlich von seiner Umgebung (weißes Papier) abhebt.

Die Aufnahme dieser Funktionen mittels Versuch nach Bild 6 hat (außer der Verwischungsgrenze) allgemeingültigen Charakter, weil die dem jeweiligen  $W_{\text{oerf}}$  zugeordneten und für die Papiereinfärbung verantwortlichen Stoßkräfte  $-m\ddot{x}_E$  unter den hier gegebenen Versuchsbedingungen als von V unabhängig angesehen werden können. Dies ist aus D 5.7 zu erkennen. Da nur der Stoßpendelversuch nach Bild 6 in Anwendung kommen kann, ist der betrachtete V-Bereich zu klein, um solche Tendenzen, wie in D 2.4.2 angedeutet, zu erkennen. Es ist also bei  $-m\ddot{x}_E(V)$  keine deutliche Abweichung der Funktionen von Parallelen zur V-Achse zu bemerken. Gleiches gilt für  $x_E(V)$  mit  $\Lambda > 0$  in D 5.8 (vgl. D 2.3).

Aus D 5.7 ist der Wert  $p_{\text{erf}}$  für  $\Lambda = 1$  abzulesen ( $p_{\text{erf}} \approx 14,71 \text{ MPa}$ ). Dies ist die Flächenpressung, bei der das verwendete Farbband den erforderlichen Farbstoff an das Papier abgegeben hat. Diagramm 5.9 kann z.T. aus den beiden vorangegangenen Diagrammen ermittelt werden, indem dort V eliminiert wird. Die Kurven sind aber in getrennten Versuchen ermittelt worden. Da im Bereich kleiner Werte  $x_E$  bzw.  $|m\ddot{x}_E|$  die Kurven z.T. grobe Näherungen darstellen, können hier im Vergleich zu D 5.7 und D 5.8 Abweichungen auftreten. Die Darstellung  $-m\ddot{x}_E(x_E)$  liefert die Aussage, welche Stoßkraft bei dem gleichen Stoßvorgang gemessen wird, von dem  $x_E$  bekannt ist.



Es ist zu beachten, daß sich für  $W_{\text{oerf}}$  von Meßpunkt zu Meßpunkt die Bedingungen ändern. Zwischen den Meßpunkten liegende Werte sind nicht möglich ( $\Lambda$  ganzzahlig). Wird  $\Lambda$  konstant gehalten und  $W_0$  variiert, dann ergeben sich die ausgezogenen Funktionen, die sämtlich durch den Koordinatenursprung verlaufen müssen.  $W_0$  wächst entlang dieser Funktionen mit zunehmender Entfernung vom Nullpunkt. Für  $\Lambda = 0$  und  $\Lambda = 5$  sind punktiert die Verbindungen der Meßpunkte dargestellt. In D 5.9 sind die Niveaulinien für verschiedene  $W_0$ -Werte eingetragen. Sie können stets als Geraden angesehen werden, deren Anstieg negativ ist und zwischen  $W_0 \approx 0,78 \text{ mJ}$  und  $W_0 \approx 4,9 \text{ mJ}$  gleich bleibt. Das bedeutet, daß in diesem  $W_0$ -Bereich für bestimmte Erhöhung der Lagenzahl stets gleicher  $x_E$ -Zuwachs und gleiche Abnahme des Stoßkraftmaximums eintritt. Drucktechnisch ist dies allerdings von geringer Bedeutung. Ab  $W_0 \approx 0,78 \text{ mJ}$  bis  $W_0 = 0$  nimmt der Niveaulinienanstieg stetig bis auf den Wert Null zu. Oberhalb  $W_0 \approx 4,9 \text{ mJ}$  muß der Anstieg immer größere negative Werte annehmen. Die Verlängerung der Niveaulinie für  $W_{\text{oerf}}$  hat naturgemäß bei  $x_E = 0$  einen Wert  $|\ddot{m}x_E| > 0$ . Da sich zeigt, daß der Abstand auf den Niveaulinien zwischen den einzelnen  $\Lambda$ -Werten etwa gleich bleibt, kann man näherungsweise auf  $x_E$  und  $|\ddot{m}x_E|$ -Werte für  $W_{\text{oerf}}$  für hier nicht experimentell erfaßte Werte  $\Lambda > 5$  schließen (im Beispiel für  $\Lambda \approx 8 \dots 9$ ). Die Darstellung  $-\ddot{m}x_E(W_0)$  für bestimmte  $\Lambda$ -Werte zeigt D 5.10. Es ist hier die Erweiterung auf die Anwendung der Aluminiumwalze vorgenommen worden. Es bestätigt sich die Überlegung, daß mit wachsender Steifigkeit (also Al-Walze gegenüber der Hartgummiwalze) die Stoßkräfte bei gleichen Werten  $W_0$  zunehmen. Die Meßkurven waren allerdings sehr zerrissen, so daß die hier eingetragene Meßkurve mit großen Fehlern behaftet sein wird. Daß größere Werte gegenüber der Gummiwalze auftreten, ist aber eindeutig.

Gleiches trifft natürlich auf die Erhöhung des Durchmessers  $d$  zu (D 5.11).

Die Kenntnis über zu erwartende Werte von Eindringung und Stoßkraft unter bestimmten Bedingungen ist bei der Konstruktion von Druckwerken durchaus von Bedeutung. Vervollständigt wird die Übersicht daher noch durch die Darstellung  $x_E, -\ddot{m}x_E(v_r)$  in D 5.12.

Es bestätigt sich auch für  $\Lambda > 0$  die in den Darstellungen D 2.7 und D 3.1 gewonnene Erkenntnis, daß eine Erhöhung der Relativgeschwindigkeit die Eindringung und Stoßkraft sinken läßt.

Diagramm D 5.13 gibt schließlich Auskunft über die für eine bestimmte Lagenzahl  $\Lambda$  notwendige Energie  $W_{\text{oerf}}$  in Abhängigkeit von  $\Lambda$ .

Wichtig bei der Konzipierung von Druckwerken ist vor allem auch die Kenntnis der Rückprallgeschwindigkeit  $\dot{x}_{00}$  des Druckelementes. Auch  $\dot{x}_{00}$  bzw. das Verhältnis  $\varepsilon = \frac{\dot{x}_{00}}{\dot{x}_0}$  ist natürlich von den jeweiligen Bedingungen abhängig. Die Stoßzahl  $\varepsilon$  ist unmittelbar verknüpft mit dem Energieverlust  $\Delta W_s$  während des Stoßes:

$$\Delta W_s = W_0 (1 - \varepsilon^2)$$

In D 6.1 ist die gemessene Abhängigkeit  $\dot{x}_{00}(\dot{x}_0)$  für eine bestimmte Parameterkombination unter Variation von  $\Lambda$  dargestellt. Es ist erkennbar, daß  $\dot{x}_{00}(\dot{x}_0, m = \text{const.})$  insgesamt ein degressives Verhalten zeigt, d.h. die Stoßzahl  $\varepsilon$  wird mit zunehmender Auftreffgeschwindigkeit bzw. Auftreffenergie und damit auch Eindringtiefe immer kleiner. Mit wachsender Deformation des gestoßenen Körpers steigen also die Energieverluste  $\Delta W_s$  (siehe auch D 4.7  $\Delta t(\dot{x}_0)$ ). Es ist dies ein charakteristisches Merkmal der Materialdämpfung, die unter 1.5.1.1. behandelt wird (siehe auch 3.3.). Das gleiche Ergebnis zeigen z.B. auch Untersuchungen, die in /67/ beschrieben werden. Auch bei Verwendung der Aluminiumwalze streuen die Werte zunehmend mit wachsendem  $\Lambda$ . Es ist zu bemerken, daß dabei die Meßwerte sich mit zunehmender Lagenzahl für kleinere Werte  $\dot{x}_0$  immer mehr an die unter Verwendung der Gummiwalze angleichen. Aus D 6.1 geht die Darstellung  $\Delta W_s(W_0)$  in D 6.2 durch Umrechnung hervor. Hier werden die oben getroffenen Feststellungen z.T. besser verdeutlicht.

Schließlich zeigt D 6.3.1 noch die Funktionen  $\Delta W_s(v_r)$  und  $\Delta W_s(A)$ . Damit die Aussagefähigkeit erhöht wird, wurde die Eindringtiefe  $x_E$  - und damit auch die Flächenpressung - bei  $\Delta W_s = \Delta W_s(v_r)$  konstant gehalten.

Interessant ist, daß mit einer Vergrößerung der Druckfläche die Verlustenergie sinkt, sofern die Aufschlagenergien - oder schärfer formuliert:  $m$  und  $\dot{x}_0$  - konstant gehalten werden. Wird ein bestimmtes  $x_E$  gefordert - also  $W_0$  variiert - , dann wächst natürlich  $\Delta W_s$  mit  $A$  (D 6.3.2).

Die Diagramme 5 und 6 geben einen umfassenden Überblick über die aus den Versuchen erzielten Ergebnisse. Es sind zudem Querverbindungen möglich, die weitere Abhängigkeiten erkennen lassen. Die Auswahl der Diagramme beschränkte sich auf die wichtigsten, die Drucktechnik interessierenden Funktionen. Es wurde stets auf die

Allgemeingültigkeit der Darstellung geachtet.

#### 1.4.3.3. Vergleich mit den Ergebnissen anderer Arbeiten

Die unter /1/ zitierte Arbeit kommt dem hier behandelten Problemkreis am nächsten. Ein Vergleich der Ergebnisse ist in mehreren Fällen möglich. Dabei ist die unter 1.4.1.2. erläuterte Einschränkung zu beachten, daß in /1/ wegen der dort getroffenen Anordnung des Druckaufnehmers nicht der tatsächliche Verlauf der Stoßkraft registriert wird. Wenn auch der Fehler bezüglich des Wertes der Stoßkraft relativ gering sein wird, so stellt sich aber sicher eine Verzögerung zwischen dem tatsächlichen Stoßkraftverlauf und seiner Registrierung ein. Dies äußert sich in den im Vergleich zu den gemessenen  $\varepsilon$ -Werten sehr geringen  $\Delta t$ -Werten. Es werden für  $\Delta t$  wenige Mikrosekunden angegeben (vergl. D 4.7). Die  $\varepsilon$ -Werte wurden ebenfalls aus  $\varepsilon = \dot{x}_{00}/\dot{x}_0$  bestimmt und liegen je nach Papier und Druckzeichen zwischen den Werten 0,3 und 0,5. Es wird nicht angegeben, für welche Aufprallenergien diese Werte gelten. D 6.1 zeigt im Vergleich dazu die eigenen Meßwerte, die speziell für die in D 9.2 gezeigte Parameterkombination deutlich nach oben abweichen. Als Mittelwert im Bereich der benötigten Abdruckenergien kann  $\varepsilon_m \approx 0,64$  angegeben werden. Die Werte streuen innerhalb des angegebenen Bereiches stark. Übereinstimmung findet sich in der Proportionalität  $t_{ab}, t_{aus} \sim 1/\dot{x}_0$ , wenn  $m$  konstant gehalten wird (D 4.1 und D 5.1 bzw. D 5.2). In /1/ wird diese Proportionalität auf  $t_{ab}$  bezogen. Bezüglich der Masse  $m$  wird unter der Voraussetzung konstanter Druckkraft  $-m\ddot{x}_E$  die Proportionalität  $t_{ab} \sim \sqrt{m}$  angegeben. Die genannte Voraussetzung ist nach den eigenen Untersuchungen (s. D 5.7) identisch mit der Forderung nach konstantem  $W_0$ . Damit kann nicht nur die Proportionalität  $t_{ab} \sim \sqrt{m}$  bestätigt (s. D 4.1.2), sondern auch  $t_{aus} \sim \sqrt{m}$  (s. D 5.3.1) nachgewiesen werden. Auch hinsichtlich der erforderlichen Aufprallenergien liegt weitestgehend Übereinstimmung vor.

Für die Type W mit einer Linienbreite von 0,13 mm und damit einer Druckfläche von etwa  $1 \text{ mm}^2$  werden für  $v_r = 0$  je nach Papierart und Lagenzahl in /1/ Werte  $W_{oerf}$  von  $(1...5) \cdot 10^4$  erg bei  $\Lambda = 1$  und  $(4...11) \cdot 10^4$  erg bei  $\Lambda = 5$  angegeben. Die Abhängigkeit  $-m\ddot{x}_E(W_0)$  wird als linear ausgewiesen, was in D 5.10 und D 3.3 bzw. D 3.2 näherungsweise bestätigt wird. Um die Werte  $W_{oerf}$  zu vergleichen, muß die Abhängigkeit  $W_{oerf}(\Lambda)$  beachtet werden. Dazu sind die Durchmesser der Drucknadeln entsprechend dem Meßprogramm variiert worden. In D 5.13 sind die Ergebnisse eingetragen. Wie bereits erläutert,



wurden die  $W_{\text{oerf}}$  rein subjektiv festgelegt. Im Diagramm ist daher für jeden A-Wert auch nur ein gewisser Bereich anzugeben. Man kann näherungsweise eine Gerade durch die drei Meßbereiche legen. Diese hat einen Anstieg von etwa  $314 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$ . Dieser Wert liegt in dem in /1/ angegebenen Energiebereich (etwa  $4 \cdot 10^4$  erg).

Bezeichnet man die erforderliche Flächenpressung mit  $p_{\text{erf}}$  (siehe D 5.7), dann kann unter Vernachlässigung der Reibungskraftkomponente  $p_{\text{erf}} \approx \frac{c x_E^n}{A}$  geschrieben werden.

Bleiben analog die Reibungsenergieverluste unberücksichtigt, dann ist

$$W_{\text{oerf}} = \frac{1}{2} \left( m \dot{x}_0^2 \right)_{\text{erf}} \approx \frac{C}{n+1} X_E^{n+1}.$$

Elimination von  $x_E$  liefert schließlich die Proportionalität  $W_{\text{oerf}} \sim A^{(n+1)/n}$  bei sonst konstanten Bedingungen. Die Funktion  $W_{\text{oerf}}(A)$  wird also - wenn  $n \geq 1$  - überlinear sein. In D 5.13 ist diese Tendenz zu erkennen. Deutlich wird dies auch in /57/ gezeigt. Allerdings liegt der dort angegebene Wert  $W_{\text{oerf}}/A$  mit etwa  $200 \text{ pcm/mm}^2$  deutlich über dem hier und in /1/ gemessenen.

Die eben erwähnte Näherungsrechnung liefert auch  $W_{\text{oerf}} \sim p_{\text{erf}}^{(n+1)/n}$  und damit  $W_{\text{oerf}} \sim -(m\ddot{x}_E)^{(n+1)/n}$  bei sonst konstanten Bedingungen. Auch die Funktion  $W_{\text{oerf}}(-m\ddot{x}_E)$  müßte also überlinear sein. In /1/ wird die maximale Stoßkraft für  $W_0 \approx 4 \cdot 10^4$  erg mit etwa 15 kp (für die Type W,  $\Lambda \approx 3$ ) angegeben. Setzt man vereinfachend  $W_0 \sim -m\ddot{x}_E$  an, dann stimmen auch die registrierten Stoßkräfte etwa überein ( $\frac{15 \text{ kp}}{\text{mm}^2} = \frac{1050 \text{ p}}{0,07 \text{ mm}^2} / 1$ ; s. D 5.9, D 2.5). Mit /57/ wird weiterhin Übereinstimmung erzielt in der V-Invarianz der Werte  $x_E$  und  $-m\ddot{x}_E$  im hier interessierenden Bereich.

In /1/ wird der Zusammenhang  $t_{\text{aus}}(\Lambda)$  als schwach nichtlinear ausgewiesen. D 5.3.2 zeigt, daß eine exakte Ausweisung dieser Nichtlinearität auf Grund der Streuung der Werte hier nicht möglich war. Aus /1/ geht allerdings auch nicht klar hervor, für welche Werte  $W_0$  der Zusammenhang  $t_{\text{aus}}(\Lambda)$  gilt (es ist zu unterscheiden, ob  $W_0$  längs einer Kurve konstant bleibt, oder ob sich  $W_0$  ändert (z.B. den jeweils für  $\Lambda$  entsprechenden Wert  $W_{\text{oerf}}$  annimmt)).

Ein Vergleich der Ergebnisse mit den Aussagen in /2/ ist möglich für die Beziehungen  $t_{\text{ab}}(\dot{x}_0)$  und  $-m\ddot{x}_E(\dot{x}_0)$ . Es zeigt sich wiederum Übereinstimmung in der Proportionalität  $t_{\text{ab}} \sim 1/\dot{x}_0$ . Da die Berechnungen in /2/ ebenfalls wie obige Näherung ohne Berücksichtigung der Reibung erfolgen, muß sich auch dort das Ergebnis  $W_0 \sim -(m\ddot{x}_E)^{(n+1)/n}$  bzw.  $-m\ddot{x}_E \sim (\dot{x}_0^2)^{n/(n+1)}$  einstellen. Nur für den Hookeschen Fall  $n = 1$  folgt  $-m\ddot{x}_E \sim \dot{x}_0$ .

### 1.5 Theoretische Behandlung

Ziel der theoretischen Betrachtungen ist es, das Zeitverhalten der Bewegungsgrößen während des Stoßes zu ermitteln. Es wurde bereits teilweise begründet, warum dabei nicht der Weg der Approximation der experimentell gewonnenen Abhängigkeiten durch gewisse Funktionen beschritten wird /1/. So wäre es z.B. möglich, die Weg- und Verzögerungszeitverläufe durch  $f(t) = a_1 t^{a_2} e^{a_3 t}$  oder die Jacobische elliptische Funktion  $\sin \operatorname{am}(t, a)$  anzunähern. Auf Grund der Vielzahl der Experimente könnte dann eine Tabelle angegeben werden, in der die Parameter  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  bzw.  $a$  für die jeweiligen Bedingungen (Material und Form der Stoßkörper, Massenverhältnisse) festgehalten sind. Es wäre dies aber eine bloße Aufzählung empirischer Werte, die bei anderen Bedingungen ihre Gültigkeit verlieren. Um den Abdruckvorgang tiefgründig und allgemein zu erfassen, bleibt nur der Weg, die Dgl. der Bewegung aufzustellen und sie möglichst zu lösen.

In einer sehr umfassenden Art ist dies von Berger /2/ vorgenommen worden. Deformationen beider Stoßkörper zulassend werden - ausgehend vom Impulsgleichgewicht und der Energiebilanz des Stoßsystems vor und nach dem Stoß - unter Berücksichtigung verschiedener Elastizitätsgesetze (u.a. auch der Hertzschen Form) und verschiedener Massenverhältnisse die Beziehungen von Stoßkraft, Maximalwert der Stoßkraft, Stoßdauer, Auftreffgeschwindigkeit und Stoßweg untereinander bzw. mit der Zeit ermittelt. Dies gelingt z.T. nur über sehr umfangreiche Rechnungen. In allen Fällen aber bleibt der Energieverlust unberücksichtigt. So ist dann auch im Falle linearer Elastizitätsgesetze der Stoßkraft-Zeit-Verlauf rein sinusförmig, und das in 1.4.3. gezeigte Charakteristikum des realen Stoßes, nämlich die zeitliche Verschiebung zwischen den Extrema von Stoßkraft und -weg, kann nicht behandelt werden. Dahin gelangt man nur über das dynamische Kräftegleichgewicht unter Beachtung der Dissipation.

#### 1.5.1. Aufstellen der Stoß-Differentialgleichung

Ausgehend von der vereinfachten Darstellung der Stoßkörperpaarung in Bild 1 sollen zunächst die einzelnen Bewegungsabschnitte klar abgegrenzt werden.

Bei Untersuchungen, die die Ermittlung der Geschwindigkeiten der Stoßkörper nach dem Stoß zum Inhalt haben (Bestimmung der Newtonschen Stoßzahl  $\epsilon$ ) ist es ausreichend, den Stoßvorgang global in eine Kompressions- und in eine Restitutionsphase zu unterteilen. Wenn aber die Vorgänge während des Stoßes zu betrachten sind,

müssen selbst diese beiden Begriffe Kompression und Restitution neu überdacht werden. Aus Bild 9 ist zu erkennen, daß die Extremwerte  $x_E$  und  $-\ddot{x}_E$  von Weg bzw. Verzögerung zu unterschiedlichen Zeitpunkten  $t_{xE}$  und  $t_{\ddot{x}E}$  erreicht werden. Es ist  $t_{\ddot{x}E} < t_{xE}$ . Das bedeutet, daß man - obwohl sich die Schwerpunkte der Stoßkörper bis  $t_{xE}$  weiterhin annähern - ab  $t_{\ddot{x}E}$  nicht mehr von einer Kompression im eigentlichen Sinne sprechen kann, denn eine Verdichtung oder Zusammendrückung hat stets eine Erhöhung der Gegenkraft zur Folge. Genau dies trifft aber ab  $t_{\ddot{x}E}$  hier nicht mehr zu. Aus diesem Grunde wird definiert, daß die Kompressionsphase beim realen Stoß zweier Körper genau dann beendet ist, wenn die Stoßkraft ihr Maximum erreicht. Daran schließt sich die Restitutionsphase an (Bild 13.3). Aus Bild 9 ist aber auch ebenso eindeutig zu erkennen, daß die Verzögerung  $-\ddot{x}$  bereits wieder den Wert Null erreicht, bevor der stoßende Körper erneut das Niveau  $x = 0$  durchläuft. Da die beiden Stoßkörper ja nicht miteinander verbunden sind (von Verhakungen im Papier und Verkleben mit dem Aufzeichnungsträger z.B. auf Grund des vorhandenen Farbstoffes (Anwendungsfall Drucktechnik) soll hier abgesehen werden), bedeutet dies, daß sich zum Zeitpunkt  $t_{ab}$  die beiden Stoßkörper voneinander lösen. Der eigentliche Stoßvorgang ist damit beendet. Im Anwendungsfall Drucktechnik aber interessiert zusätzlich die Frage, wann das Druckelement das Niveau  $x = 0$  wieder erreicht und welche Geschwindigkeiten es dabei besitzt. Bevor nämlich das Druckelement den Bereich des Walzen-, Papiermaterials nicht verlassen hat, kann bei schlagender Kontrasterzeugung dieses Druckelement noch nicht an den nächsten Druckort befördert werden. Die Zeitspanne  $t_{aus} - t_o$  bestimmt also in diesem Falle der Kontrasterzeugung die maximal mögliche Schreibgeschwindigkeit (Ergebnisse unter 1.4.3.).

Höchstens für Laboruntersuchungen interessant und zu beachten ist die Zeitspanne  $t_w - t_{ab}$  bis zur völligen Erholung des gestoßenen Materials. In der drucktechnischen Praxis besteht nicht die Notwendigkeit, den gleichen Ort auf dem Aufzeichnungsträger mehrmals zu beanspruchen. Ist Zerstörung (Lochbildung) ausgeschlossen, wird  $t_w$  von der elastischen Unterlage (z.B. Gummiwalze) sicher durchlaufen sein, wenn der gleiche Oberflächenbereich erneut belastet wird.

Die Zeitdifferenz  $\Delta t = t_{xE} - t_{\ddot{x}E}$  ist ein charakteristisches Merkmal der hier untersuchten Stöße und konnte in allen Fällen direkt gemessen werden. In /1/ wird indirekt auf ihre Existenz geschlossen, aber keine Erklärung für ihr Vorhandensein gegeben. Sie wird dort auf "eine Eigenschaft der Materialien" zurückgeführt. Diese



"Eigenschaft" ist eindeutig die innere Dämpfung der Materialien und wird Materialdämpfung genannt (siehe 1.5.1.1.). Aus der Tatsache, daß bei den hier angestellten Experimenten stets  $\Delta t \neq 0$  festgestellt werden konnte, ist eine wichtige Schlußfolgerung für die Gestalt der Dämpfungsfunktion ableitbar (siehe 1.5.1.3.).

#### 1.5.1.1. Die Materialdämpfung

Sämtliche schwingenden Gebilde unterliegen Dämpfungseinflüssen, die bei einer erzwungenen Schwingung eine zeitliche Verschiebung zwischen Erregung und Schwingung hervorrufen und bei freien Schwingungen diese zum Abklingen veranlassen. Die Dämpfungskräfte können von außen auf das schwingende System einwirken (äußere Dämpfung) oder ihren Ursprung im System selbst haben (innere Dämpfung). Je nachdem, ob die innere Dämpfung durch "insichschwingende" Bauteile (z.B. Längs- oder Biegeschwingungen) oder durch "im ganzen" schwingende, miteinander verbundene Bauteile hervorgerufen wird, spricht man von Materialdämpfung oder sogenannter Konstruktionsdämpfung (z.B. in Nietverbindungen).

In der Literatur ist häufig auch der Begriff Strukturdämpfung anzutreffen. Er wird aber oft doppeldeutig sowohl für die Materialdämpfung als auch für die Konstruktionsdämpfung verwendet. Das rührt wohl daher, daß die Materialdämpfung abhängig ist von der Mikrostruktur (z.B. Polymere oder kristalliner Aufbau) und die Konstruktionsdämpfung von der Makro-Struktur des Systems (z.B. Anzahl und Art der einzelnen Bauteilverbindungen). Der Begriff Strukturdämpfung soll daher fortan vermieden werden. Es ist evident, daß die Materialdämpfung nicht nur abhängig sein wird vom Molekulargefüge des Materials, sondern ebenfalls von der Geometrie des Bauteils beeinflusst wird. Gelingt es, beide Einflußgrößen getrennt zu erfassen, dann gelangt man zu Werkstoff- und Werkstückkennwerten. Auch die Art der Beanspruchung (Zug/Druck, Biegung, Torsion, Kombinationsschwingungen) spielt natürlich eine Rolle. Eine gute Bearbeitung dieser Sachverhalte findet man in /21/.

Die Vorgänge, die sich bei der irreversiblen Umwandlung von Schwingungsenergie im Inneren des Werkstoffes abspielen, sind wenig erforscht. Meist werden für die Energiedissipation lokale plastische Deformationen verantwortlich gemacht. Je nach Material laufen diese Prozesse sehr unterschiedlich ab.

Es sind Modelle bekannt, die die Dämpfung im molekularen Bereich erklären /54/.

Im Rahmen der hier angestellten Stoßuntersuchungen wäre es jedoch

zu aufwendig, über die Erforschung der Vorgänge in der Mikro-Struktur einen geeigneten Dämpfungsansatz zu suchen. Es werden vielmehr die makroskopischen Erscheinungen erfaßt und in geeigneter Weise verwendet. Dazu dienen die oben beschriebenen Versuchsstände. Über die Materialdämpfung existiert außerdem ein umfangreiches Schrifttum.

Die Quellen /21 - 55/ vermitteln einen ausreichenden Überblick.

Beim Studium der Literatur kann man folgende Fakten festhalten:

- Fast ausschließlich wird zur Bestimmung der Eigenschaften der Materialdämpfung das Prüfobjekt einer harmonischen Erregung unterworfen. Als Folge dessen finden in der theoretischen Behandlung freie Schwingungen oder gar der Stoß zweier Körper kaum Beachtung.
- In der Begründung und der mathematischen Beschreibung der Ansätze für Materialdämpfung werden oft unterschiedliche Auffassungen deutlich. Vielfach werden die entsprechenden Begriffe auch formal aus der Wechselstromtheorie übertragen. Andere Autoren (z.B./29/) verwenden von Sorokin /23/ aufgestellte empirische Formeln zur Beschreibung der Materialdämpfung in Bewegungsgleichungen.
- Die Experimente liefern teilweise verschiedenartige sich widersprechende Ergebnisse hinsichtlich mancher Eigenschaften der Materialdämpfung, so z.B. der Abhängigkeit des Dämpfungsvermögens von der Amplitude des schwingenden Gebildes und von der Erregerfrequenz. Auch die Form der Resonanz- und Hysteresekurven, die Resonanzbreiten und Resonanzamplituden werden als Kriterien des Vergleichs der Experimente untereinander herangezogen. Es muß aber beachtet werden, daß die in der Literatur erwähnten Experimente oft die verschiedenartigsten Materialien als Untersuchungsgegenstand besitzen, so z.B. Stahl, Gußeisen, Gummi, Holz und Beton. Unterschiede in den experimentellen Ergebnissen auch in qualitativer Hinsicht können also materialbedingt sein.

So sind über den Zeitraum der Erforschung der Materialdämpfung verschiedene Hypothesen zu deren mathematischen Erfassung entstanden. Manche Autoren stellen einige solcher Hypothesen zum Vergleich gegenüber und ziehen dazu umfangreiche Experimente heran /23, 36, 53/.

Während in /53/ die Materialdämpfung bei Torsionsschwingungen von Metallen untersucht wird und sich dabei die Hypothese von

D a w i d e n k o w /56/ als die geeignetste herausstellt, haben die Ergebnisse von /36/ für den Anwendungsfall der Drucktechnik besondere Bedeutung, weil dort Gummifedern untersucht werden. In /23/ wird die Gegenüberstellung besonders ausführlich vorgenommen. Beide

Autoren geben den Ansatz nach S o r o k i n als den geeignetsten an. Danach wird in der Bewegungsgl. des Schwingers mit dem Freiheitsgrad der Dämpfungstherm  $F_D$  im Gegensatz zu der am weitestverbreiteten Hypothese von Voigt bei harmonischem Bewegungsablauf zusätzlich als umgekehrt proportional zur Erregerfrequenz angesehen:

$$\begin{aligned} \text{Sorokin } F_D &\sim \dot{q}/\Omega \\ \text{Voigt } F_D &\sim \dot{q} \end{aligned} \quad (1)$$

Mittels statistischer Betrachtungen gelangte S o r o k i n /23/ für harmonische Bewegung des Schwingers zu folgender Spannungs ( $\sigma$ ) - Dehnungs ( $\varepsilon$ ) - Beziehung:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \pm \frac{\psi}{2\pi} E \varepsilon_0 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2}} \quad (2)$$

Darin sind  $\varepsilon_0$  die Amplitude der Dehnung,  $E$  der Elastizitätsmodul und  $\psi$  ein noch zu erklärender Dämpfungsbeiwert des Materials. Die Glg. (2) bestimmt die Hysteresefunktion des Schwingers in einer elliptischen Form.

Setzt man getreu der Voraussetzung einen harmonischen Dehnungsverlauf mit der Kreisfrequenz  $\Omega$  an, dann läßt sich (2) umformen in

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + E \frac{\psi}{2\pi} \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\Omega} \quad (3)$$

Verbreitet ist wegen der leichteren rechnerischen Behandlung die komplexe Form von (3), nämlich

$$\bar{\sigma} = E \left( 1 + j \frac{\psi}{2\pi} \right) \cdot \varepsilon \quad (4)$$

Hierbei sind jetzt  $\bar{\sigma}$  und  $\varepsilon$  im Gegensatz zu Glg. (3) als komplexe Größen anzusehen.

In der Literatur ist mitunter zu lesen, daß nach der Sorokinschen Theorie die Materialdämpfungskräfte proportional dem momentanen Ausschlag des Schwingers seien. Meist wird dann nicht betont, daß dies natürlich nur für die komplexe Darstellung der Dämpfungskraft zutrifft. Auch der Voigtsche Ansatz (Stokessche Reibung) kann in diese der Elongation proportionale komplexe Form umgeschrieben werden. Jeder Dämpfungskraftvektor, auch der die Materialdämpfung erfassende, muß notwendigerweise antiparallel zum Geschwindigkeitsvektor liegen.

Im folgenden wird nun die Dämpfungskenngroße  $\psi$  erläutert und Glg. (4) auch für freie Schwingungen bestätigt. Die erwähnte Hystereseschleife mit dem Flächeninhalt  $\Delta W$ , welcher den Energieverlust des Schwingers innerhalb einer Periode repräsentiert, hat die Form einer Ellipse, wenn Kraft- und Weg-Zeitverlauf um den Winkel  $\varphi$



verschobene harmonische Funktionen mit der Kreisfrequenz  $\Omega$  sind.

Bild 14 verdeutlicht den Sachverhalt. Es ist  $F$  die erregende Kraft. Für  $\varphi \rightarrow 0$  verschwindet auch  $\Delta W$  und die Hysterese-funktion entartet zu einer Linie, der Federkennlinie des Schwingers. Den Zusammenhang  $\Delta W = \Delta W(\varphi)$  gewinnt man über das Integral

$$\Delta W = \frac{1}{2} \oint (F \dot{q} - q \dot{F}) dt \quad t \in [0, \frac{2\pi}{\Omega}] \quad (5)$$

Es wird 
$$\Delta W = \pi q_0 F_0 \sin \varphi \quad \varphi \in [0, \pi] \quad (6)$$

Bezieht man  $\Delta W = \pi ab$  ein, dann folgt nach Gleichsetzen mit (6):

$$\sin \varphi = \frac{ab}{q_0 F_0}$$

Dies ist eine Möglichkeit der experimentellen Bestimmung der Phasenverschiebung  $\varphi$  durch Ausmessen der Ellipsenhalfachsen. Andere Möglichkeiten der  $\varphi$ -Bestimmung (z.B. durch Ablesen der Schnittpunkte der Ellipse mit den Koordinatenachsen) werden unter 1.6. erläutert.

Für schmale Hystereseellipsen ( $\varphi \leq 0,1$ ) verschieben sich die Bewegungsumkehrpunkte 3 und 4 in die Endpunkte 1 und 2 der großen Halbachse. Dann kann mit guter Näherung die in diesen Umkehrpunkten gespeicherte Energie  $W$  bei linearer Federcharakteristik durch  $W \approx \frac{1}{2} \cdot q_0 F_0$  angegeben werden.

Die Phasenverschiebung zwischen  $F$  und  $q$  wird in der Fachliteratur im Zusammenhang mit der Materialdämpfung anstelle von  $\varphi$  mit  $\gamma$  bezeichnet. Nun läßt sich unter Verwendung von (6) die Bestimmungsgleichung für die Dämpfungskapazität  $\psi$  aufschreiben:

$$\psi := \frac{\Delta W}{W} \quad (7)$$

$$\psi = 2 \pi \sin \gamma \approx 2 \pi \gamma \quad \text{für } \gamma \leq 0,1 \quad (8)$$

Auch für verzerrte Hystereseschleifen, also für periodische, aber nicht harmonische Bewegung  $q(t)$  kann die Beziehung (4) angesetzt werden. Es wird die Bewegung dann durch die Fourierreihe

$$\varepsilon(t) = \sum_i \varepsilon_i \cos(\Omega_i t - \varphi_i)$$

dargestellt. Die  $\Omega_i$  sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz  $\Omega$ . Es sind dann  $\varepsilon_i$  und  $\varphi_i$  die charakteristischen Konstanten des Systems.

Die Superposition

$$\sigma = \sum_i \sigma_i$$

wird in /23/ mit der Kleinheit der Dämpfungskräfte gegenüber den elastischen Kräften gerechtfertigt. In /21/ wird  $\psi$  als Nenndämpfung (dimensionslose Dämpfungskenngröße des gesamten Schwingers)

bezeichnet im Gegensatz zur Elementdämpfung  $\psi_e$ , die nicht mehr von Form und Größe des schwingenden Bauteils, sondern nur noch von dessen Material und der inneren Spannungsverteilung bestimmt wird. Für Zug-Druck-Schwinger gilt  $\psi = \psi_e$ , während bei Torsions- und Biegeschwingungen Querschnitt und Belastungsfall zu beachten sind. Der praktische Nutzen der Einführung der Elementdämpfung  $\psi_e$  liegt darin, daß man in der Lage ist, durch Errechnung von  $\psi_e$  aus der an einer bestimmten Probe ermittelten Nenndämpfung  $\psi$  nun für anders geformte und belastete Proben gleichen Materials durch erneute Rückrechnung von  $\psi_e$  zu  $\psi$  die Nenndämpfung rein rechnerisch ohne neuerliche Experimente bestimmen zu können.

Einige charakteristische Eigenschaften der Materialdämpfung bei harmonischer Erregung des Schwingers sind von Sorokin durch Versuche ermittelt worden:

- die Hysteresefunktion nimmt nach wenigen Perioden die Form einer elliptischen Schleife an
- für Frequenzen  $\Omega \geq 0,03$  Hz ist der Energieverlust pro Periode quasi unabhängig von  $\Omega$  (als Probematerial diente auch Gummi)
- der Verlustwinkel  $\gamma$  steigt mit der Dehnungsamplitude  $\epsilon_0$  für kleine Werte  $\epsilon_0$  linear mit relativ großem Anstieg; bei großen Werten  $\epsilon_0$  ist  $\gamma$  quasi unabhängig von  $\epsilon_0$
- $\gamma$  ist temperaturabhängig

In /36/ sind diese Ergebnisse an Gummifedern verschiedenster Formen und unterschiedlicher Volumina für Frequenzen  $90 \leq \Omega [\text{Hz}] \leq 630$  im wesentlichen bestätigt worden. Die Tatsache der etwa linearen Abhängigkeit  $\gamma(\epsilon_0)$  für kleine Werte ist gerade bei Stoßuntersuchungen wegen der hier auftretenden kleinen Verformungen von besonderem Interesse. Für Schwingungen von Kragträgern verschiedener Materialien kann man aus /23/ entnehmen, daß unter diesem Gebiet kleinere Verformungen stets Werte  $q_0 < 1$  mm zu verstehen sind. In /36/ fand dieses Gebiet leider keine Berücksichtigung. Der Zusammenhang  $\gamma(\epsilon_0)$  wird in /38/ allgemein durch

$$\gamma(\epsilon_0) = a_1 \left( \frac{\epsilon_0}{a_2 + \epsilon_0} + \frac{a_3 \epsilon_0^{a_4}}{1 + a_5 \epsilon_0^2} \right) \quad (9)$$

beschrieben. Darin sind  $a_1$  bis  $a_5$  experimentell zu bestimmende Werkstückkenngrößen.

Für freie materialgedämpfte Schwingungen kann analog zu Beziehung (1) die Dämpfungsfunktion  $F_D$  durch

$$F_D = k^* \frac{\dot{q}}{\omega} = \bar{k} \dot{q} \quad (10)$$

dargestellt werden. Darin ist  $k^*$  der Proportionalitätsfaktor

und  $\omega$  verkörpert die sich einstellende Kreisfrequenz der materialgedämpften Schwingung des Probekörpers.

Idealisiert man das schwingende Kontinuum zum diskreten Schwinger konstanter Masse und linearer Federcharakteristik (Bild 15.1), dann wird die freie Schwingung durch Glg. (11) beschrieben:

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{\bar{k}}{2m}t} \cos(\omega t + \xi) \quad (11)$$

Durch Differentiation folgen:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \omega_0 q_0 e^{-\frac{\bar{k}}{m}t} \cos(\omega t + \xi + \alpha) \\ \ddot{q}(t) &= \omega_0^2 q_0 e^{-\frac{\bar{k}}{m}t} \cos(\omega t + \xi + 2\alpha) \end{aligned}$$

Dabei sind  $\sin \alpha = \frac{\omega}{\omega_0}$  und  $\cos \alpha = -\frac{\bar{k}}{2\omega_0 m}$  mit  $\omega^2 = \frac{c}{m}$ .

In Bild 16.1 wird  $q$  als der Realteil  $\operatorname{Re}\{\dot{q}\}$  des komplexen Wegzeigers  $\dot{q}$  angesehen. Es ist die Tatsache abzulesen, daß der Geschwindigkeitszeiger bei Anwesenheit von Dämpfung stets in einen Anteil  $\lambda_1^* \dot{q}$  und eine dazu senkrechte Komponente  $j\lambda_2^* \dot{q}$  zerlegbar ist. Es ist demnach

$$m\ddot{q} + [\bar{k}\lambda_1^* + c + j\bar{k}\lambda_2^*] \dot{q} = 0 \quad (12)$$

gültig. Der Klammerausdruck kann als komplexe Federsteifigkeit gedeutet werden:

$$c_k = \bar{k}\lambda_1^* + c + j\bar{k}\lambda_2^* = c_k(\lambda_1 + j\lambda_2) \quad (13)$$

In (12) ist der Ansatz (4) enthalten, der für harmonische Erregung abgeleitet wurde. In der erregenden Kraft  $\varepsilon(t) = F_0 e^{j\omega t}$  wird praktisch  $F_0 = 0$  gesetzt. Das bedeutet, daß bei der freien gedämpften Schwingung die Phasenverschiebung  $\gamma$  zwischen der Massenkraft und dem Weg gemessen wird (Bild 16.1):

$$\gamma = 2\beta$$

Nachweis:  $\alpha = \arccos\left(-\frac{\bar{k}}{2\omega_0 m}\right) = \arccos\left(-\frac{\delta\omega}{\pi\omega_0}\right) \approx \arccos\left(-\frac{\delta}{\pi}\right)$

Mit  $\delta$  nach b) aus Tabelle 3 bzw. nach Glg. (46) folgt:

$$\alpha \approx \arccos\left(-\frac{\gamma}{2}\right).$$

Potenzreihenentwicklung liefert:  $\alpha \approx \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}$ , da ja  $\gamma < 2$  erfüllt ist. Schließlich bleibt:  $2\beta = 2\alpha - \pi \approx \gamma$ .

Es folgen die Relationen in Bild 16.2 und Glg. (12) kann in (14) umgeschrieben werden:

$$m\ddot{q} + c_k e^{j\gamma} \dot{q} = 0 \quad (14)$$



In /35/ wird der imaginäre Teil von Glg. (14) als "virtuelle Schwingung" bezeichnet.

Schreibt man anstelle der Vektorgleichung (14) für kleine  $\gamma$  die beiden skalaren Beziehungen (14.1) und (14.2)

$$m\ddot{q} - c_k(q - \gamma r) = 0 \quad (14.1)$$

$$m\ddot{r} + c_k(r + \gamma q) = 0 \quad (14.2)$$

mit Realteil  $q$  und Imaginärteil  $r$ , dann folgt nach einiger Schreibarbeit

$$q = q_0 e^{-\omega_0 \mu t} \cos(\omega_0 \nu t + \xi)$$

$$\text{mit } \mu = \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{1+\gamma^2} - 1)}$$

$$\text{und } \nu = \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{1+\gamma^2} + 1)}$$

Es ist  $\mu\nu = \frac{\gamma}{2}$  und - da ohnehin  $\gamma < 0,1$  vorausgesetzt ist -  $\nu \approx 1$  sowie  $\mu \approx \frac{\gamma}{2}$ . Im Vergleich mit dem Exponenten in Glg. (11) folgt die Beziehung  $\gamma \approx \frac{k}{m\omega_0}$ , die in Tabelle 4 eingetragen ist.

Es bleibt festzuhalten: für den Dämpfungsbereich  $\bar{k} < 2\sqrt{cm}$  gehen die beiden in Bild 15 genannten Gleichungen ineinander über (Liouville-Transformation), sie sind gleichwertig. Die komplexe Federsteifigkeit  $\kappa$  wird in bestimmter Weise mit  $k$  und  $c$  verknüpft sein. Aus Glg. (13) folgt

$$c_k = \frac{c}{\lambda_1 - \lambda_2 \lambda_1^* / \lambda_2^*} = \frac{c}{f(\gamma)}$$

Beachtet man die Vorzeichen von  $\lambda_1^*$  und  $\lambda_2^*$  in Abhängigkeit von  $\gamma$ , dann zeigt sich, daß

$$f(\gamma) = \cos \gamma \pm \left| \tan \frac{\gamma}{2} \right| \sin \gamma, \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} &+ \text{für } \begin{cases} \gamma \in (0, \pi) \\ \gamma \in (2\pi, 3\pi) \end{cases} \\ &- \text{für } \begin{cases} \gamma \in (\pi, 2\pi) \\ \gamma \in (3\pi, 4\pi) \end{cases} \end{aligned}$$

und schließlich

$$f(\gamma) = 1 \quad \forall \gamma.$$

Es ist also  $c_k$  identisch mit der statisch ermittelten Federsteifigkeit  $c$ .

Sorokin verwendet auf der Grundlage umfangreicher Experimente ausschließlich die Näherung  $\gamma \approx 2\pi\gamma$ .

Der Ansatz (2) ist jedoch ebenso für größere  $\gamma$ -Werte geeignet. Wird nämlich der Erregerkraftterm in der Form  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \gamma - \gamma)$  geschrieben, entsprechend umgeformt und mit  $q(t) = q_0 \cos(\Omega t + \gamma)$  in das dynamische Kräftegleichgewicht eingesetzt, dann folgt für  $m = 0$  die Steifigkeit

$$c^* = \frac{F_0}{q_0} \cos \gamma = c \cdot \cos \gamma.$$

Diese Gerade durchläuft die Bewegungsumkehrpunkte 3 und 4 der Hystereseeellipse. Wird zur Berechnung von  $\Delta W/W$  dieser Wert  $c^*$  zugrunde gelegt, dann ergibt sich vergleichsweise zu (8) der exakte Wert der Dämpfungskapazität:

$$\psi = 2 \pi \tan \gamma \quad (15)$$

Die komplexe Elastizität aus Ansatz (4) geht damit - abgesehen von der Umschreibung in die Federsteifigkeit - in den allgemeinen Ausdruck (13) über.

Trotz der stets vorausgesetzten aber nicht explizit genannten Beschränkung auf  $\gamma \leq 0,1$  wird in /23/ der Sorokinsche Ansatz mit der Voigtschen Form u.a. auch in den Ausdrücken für das logarithmische Dekrement  $\delta$  der Dämpfung und für die Kreisfrequenz  $\omega$  der freien Schwingung verglichen.

Als Beurteilungskriterium werden die Ergebnisse umfangreicher Experimente an einseitig eingespannten biegeschwingenden, dämpfungsarmen Balken herangezogen. Der Vergleich ist in dieser Form unzulässig, weil im Voigtschen Ansatz alle Schwingungen noch ermöglichende Dämpfungswerte zugelassen sind, eine Einschränkung auf besonders kleine Dämpfungswerte also nicht besteht. Für einen solchen Vergleich muß daher die hinsichtlich Dämpfung allgemeine Form (14) verwendet werden.

In Tabelle 3 werden die Ergebnisse gegenübergestellt.

Der Vergleich von a) mit c) liefert sowohl für  $\omega$  als auch für  $\delta$  die Umrechnungsbeziehung:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\bar{k}}{2m\omega_0} \quad (16)$$

Die erwähnten Versuche mit den dämpfungsarmen Biegeschwingern brachten nach /23/ die Ergebnisse der Zeile b). Für kleine Dämpfungen gehen aber auch a) und c) in  $\omega \approx \omega_0$  und damit  $\omega \neq f(\bar{k}$  bzw.  $\gamma)$  über. Mit (16) kann auch  $\delta$  aus a) für kleine Dämpfung über c) in die b)-Form gebracht werden.

In /23/ wird aus dem Vergleich von a) und b) bezüglich  $\delta$  die Beziehung

$$\gamma \approx \frac{\bar{k}}{\sqrt{cm}} \quad (17)$$

angegeben, die natürlich ebenso aus (16) für kleine Werte  $\gamma$  folgt. Im übrigen stellt Glg. (16) nur eine andere Schreibweise der in Bild 16.1 angegebenen Relation zwischen  $\gamma$  und  $\bar{k}$  dar. Unter Beachtung von (1) bzw. (10) und Hinzuziehen der Amplitudenfrequenzgänge sind in Tabelle 4 die Umrechnungsbeziehungen zusammengefaßt. Es zeigt sich also, daß für Werte  $\gamma < 0,1$  stets die Beziehung

$$k^* \approx c \cdot \gamma \quad (19)^1$$

zum Umschreiben in die jeweils andere Form verwendet werden kann, während bei großen Werten  $\gamma$  die Unterschiede zwischen freien und erzwungenen Schwingungen beachtet werden müssen. Breites Anwendungsfeld findet (19) z.B. in /39/ bei der Berechnung linearer Systeme mit mehreren Freiheitsgraden und bei linearen Systemen mit verteilten Parametern (z.B. Querschwingungen von Stäben unter verschiedenen Randbedingungen, erzwungene Schwingungen von Rechteckplatten u.a.), indem anstelle  $E$  der Ausdruck  $E (1 \pm j\gamma)$  gesetzt wird (vergl. (4)) unter Wegfall des linear von der Geschwindigkeit abhängigen Terms.

#### 1.5.1.2. Modellfindung

Ausgehend von den Gegebenheiten in Bild 1 soll die Bewegungsdgl. gefunden werden, die die Eigenschaften des hier untersuchten Stoßvorganges genügend genau widerspiegelt. Dies geht nur über das Aufstellen gewisser mechanischer Modelle, die qualitative Hinweise über die Struktur des deformierten Materials und ihren Verformungsmechanismus geben. Die Bilder 1 und 15 deuten bereits darauf hin, daß nur einachsiger Spannungszustand betrachtet werden soll. Dann lassen sich die einfachsten rheologischen Gesetze durch Hookesche, St. Venantsche und Newtonsche Körper (viskose Flüssigkeit) bzw. verschiedener ihrer Kombinationen veranschaulichen. Im Gegensatz zur Regelungstechnik, bei der das Gebiet der experimentellen Systemanalyse bereits sehr ausgeprägt ist, erhält man bei der Materialprüfung keine vollständige Werkstoffidentifikation, sondern nur Teilinformationen. Die konzentrierten Parameter des diskreten mechanischen Ersatzmodells als erste Näherung des gestoßenen Materials, welches ein mechanisches Kontinuum darstellt, müssen experimentell bestimmt werden. Es wird dabei Zeitinvarianz der Werkstoffeigenschaften vorausgesetzt.

Die Grundtypen der Deformation sind die elastische Deformation, repräsentiert durch die vollkommen elastische Feder, und die zähe Deformation, verkörpert durch den Newtonschen Körper. Diese beiden Elemente lassen sich in den einfachsten Fällen zur Kelvin- bzw. zur

---

<sup>1)</sup> Glg. (18): siehe Tabelle 4



Maxwell-Einheit zusammenfügen (Bild 17).

Es ist zu entscheiden, welches der beiden Modelle hier zur Anwendung kommen soll bzw. kann. Von entscheidender Bedeutung sind dabei die beiden Tatsachen, daß - wie bereits erwähnt - stets  $\Delta t \neq 0$  nachgewiesen werden konnte (Bild 13.3) und die Verzögerung  $-\ddot{x}$  zum Zeitpunkt des Aufpralls der Stoßmasse  $m$  auf den gestoßenen Körper verschwinden muß:  $-\ddot{x}(x=0 \text{ bzw. } t = t_0) \stackrel{!}{=} 0$ .

In /16/ wird als Stoßmodell die Maxwell-Einheit empfohlen. Die Begründung dafür wird darin gesehen, daß dieses Modell die Bedingung  $-\ddot{m}\ddot{x}(t_0) \stackrel{!}{=} 0$  erfüllt. Auf Grund der Gleichheit von Massen- und Federkraft in jedem Augenblick beinhaltet diese Reihenschaltung aber auch, daß  $-\ddot{x}(t)$  und  $x(t)$  ihren Extremwert gleichzeitig erreichen. Es wäre damit  $\Delta t \neq 0$  nicht erfüllt (Bild 18); abgesehen davon, daß das Maxwell-Modell zwei Freiheitsgrade besitzt. Es stehen bei diesem Modell der Erfahrung auch die beiden Tatsachen entgegen, daß bei einer sehr langsamen Verformung keine Gegenkraft gemessen werden kann und nach der Entlastung eine bleibende Verformung zu messen sein müßte.

Bei Verwendung des Kelvin-Modells lassen sich dagegen beide genannten Forderungen erfüllen. Dazu ist es notwendig, den Dämpfungsterm  $F_D$  sowohl proportional  $\dot{x}$  darzustellen als ihn auch als abhängig von  $x$  zu betrachten, und zwar so, daß  $F_D(x=0) = 0$  erfüllt wird. Man schreibt (vergl. Pkt. 1.5.2.):

$$F_D = kx f(\dot{x}) \text{ mit } f(0) = 0 \text{ und } f(\dot{x}) > 0 \quad \forall |\dot{x}| > 0 \quad (20)$$

Es ist dies eine logische Folgerung aus der oben erwähnten, von Sorokin /23/ formulierten Feststellung, daß der Verlustwinkel  $\gamma$  mit der Dehnungsamplitude  $\varepsilon_0$  ansteigt. Es wird hier also der Übergang vollzogen von der Abhängigkeit  $\gamma = f(\varepsilon_0)$ , bei der  $\gamma$  als konstanter Faktor in die Bewegungsgl. eingeht, zu einer Funktion  $\gamma = f(\varepsilon)$ . Die Bewegungsgl. wird damit nichtlinear.

Die lineare Viskosität stellt ohnehin nur einen Sonderfall des allgemeinen inelastischen Verhaltens dar. Es ist meist auch nicht möglich, durch Superposition linearer Dissipationselemente nichtlineares Verhalten der Materialien nachzubilden.

Im Vergleich mit (10) folgt:

$$\ddot{x} = k \cdot f(\dot{x}).$$

Der Stoßvorgang wird hier also als die erste Halbperiode der freien Schwingung betrachtet, die sich beim Aufprall einer stoßenden Masse auf die Kelvin-Einheit einstellt, wenn gleichzeitig (20) erfüllt ist.

Untersuchungen an einer Analogrechenanlage sollen diese Auffassung präzisieren.

### 1.5.1.3. Untersuchungen am Analogrechner

Die Anwendung des Kelvin-Modells wird der eingangs aufgestellten Forderung gerecht, möglichst einfache und schnell überschaubare Verhältnisse und Zusammenhänge zur Beschreibung des Stoßvorganges heranzuziehen. Es erweist sich als nicht nötig, dieses Modell durch weitere Feder- und Dämpferelemente auszubauen. Im Stadium des Suchens nach der geeigneten Bewegungsdgl. muß man allerdings die Kelvin-Annahme linearer Elemente zunächst fallen lassen und von einer möglichst allgemeinen Form ausgehen. Dabei ist auch Glg. (20) als die erste Veränderung in dieser Hinsicht noch zu speziell.

Es soll (20) verallgemeinert werden zu

$$\begin{aligned} F_D &= f(x) \cdot h(\dot{x}) \\ \text{mit } f(x) &= a_1|x| + a_2x^2 \\ \text{und } h(\dot{x}) &= b_1\dot{x} + b_2\dot{x}^2 \cdot \text{sgn}(\dot{x}) \end{aligned} \quad (22)$$

Ebenso wie bei  $f(x)$  ist auch in der Funktion  $h(\dot{x})$  kein Absolutglied zugelassen, weil  $F_D(x = x_E) = 0$  erfüllt sein muß.

Nach der Dämpfungsfunktion  $F_D(x, \dot{x})$  möge nun die insgesamt beim Stoß bewegte Masse  $\bar{m}$  ermittelt werden. Um schnell arbeitende Druckwerke schlagender Kontrasterzeugung zu entwickeln, muß zwangsläufig zu immer kleineren Druckelementmassen  $m$  übergegangen werden. Es ist evident, daß dadurch der von  $x$  abhängige bewegte Masseanteil  $m^*(x)$  des gestoßenen Körpers einen immer größeren Einfluß gewinnt. Es ist  $\bar{m} = m + m^*(x)$ . Auch bei der Bestimmung der Funktion  $m^*(x)$  hat die bereits oben formulierte Grundforderung  $\ddot{x}(x = 0) \neq 0$  entscheidende Bedeutung.

Die Ableitung  $\frac{d}{dt}(\bar{m}(x) \cdot \dot{x})$  zeigt, daß  $-F_D$  und die negative Rückstellfunktion  $-F_R$  in  $\bar{m}\ddot{x}$  durch den Term  $-\dot{\bar{m}}\dot{x}$  ergänzt werden:

$$\bar{m}\ddot{x} = -F_D - F_R - \dot{\bar{m}}\dot{x} \quad (23)$$

Es muß  $\dot{\bar{m}} \equiv \dot{m}^*$  einer Potenz von  $x$  proportional sein. Beschränkt man sich auf den linearen Fall, dann folgt:

$$m^* = m_0 x^2 \quad (24)$$

Mit  $m^* \sim |x|$  bzw.  $\dot{m}^* \sim \dot{x} \text{sgn}(x)$  wäre zwar  $\ddot{x}(0) = 0$  wegen  $\text{sgn } 0 := 0$  ebenfalls erfüllt, aber eine Unstetigkeit von  $m^*$  bei  $x = 0$  ist nicht möglich.

Die aus theoretischen Erwägungen gefundene Beziehung (24) bestätigt sich qualitativ auch in der praktischen Anwendung. Das in Bild 1 global eingezeichnete beanspruchte Gebiet des gestoßenen Körpers kann in zwei Gebiete unterteilt werden. Direkt unter dem Druckelement ist der bewegte Masseanteil  $m_1^*$  proportional der Eindringung  $x$ . Beachtet man aber auch das beanspruchte Gebiet  $m_2^*$  außer-

halb des Durchmessers  $2r$  des Druckelementes und nähert das insgesamt beanspruchte Gebiet durch einen geraden Kegelstumpf (Bild 19), dann folgt unter Beachtung der  $x$ -Abhängigkeit von  $R$  die Beziehung

$$m^* \sim \frac{\pi x}{3} (F_R^2(x) + F_R(x)r + r^2).$$

Die Funktion  $m^*(x)$  wird also für alle  $|x| > 0$  über  $m_1^*(x)$  liegen mit stetig wachsendem Anstieg. In erster Näherung kann dann die Parabel nach (24) angesetzt werden.

Für die Rückstellfunktion  $F_R(x)$  reicht hinsichtlich praktischer Aspekte (Genauigkeit der experimentellen Untersuchungen, Nachbildung am Analogrechner) eine Polynom dritten Grades aus. Man kann  $F_R(x)$  in der Form

$$F_R(x) = \sum_{n=1}^3 c_n x^n (\operatorname{sgn}(x))^{3-n} \quad (25)$$

schreiben. Das in Bild 18 vorgestellte Kelvin-Modell (lineare Elemente) wird also verallgemeinert eine nichtlineare Form (die Bezeichnung "Kelvin-Modell" ist dann eigentlich nicht mehr gerechtfertigt und man spricht besser von einer Parallelschaltung nichtlinearer Feder- und Dämpferelemente) entsprechend Bild 20 annehmen.

Die Bewegungsdgl. lautet:

$$(m + m_0 \dot{x}^2) \ddot{x} = - (a_1 x \operatorname{sgn}(x) + a_2 x^2) (b_1 \dot{x} + b_2 \dot{x}^2 \operatorname{sgn}(\dot{x})) - \sum_{n=1}^3 c_n x^n (\operatorname{sgn}(x))^{3-n} - 2m_0 x \dot{x}^2 \quad (26)$$

Es muß nun geprüft werden, auf welche der Koeffizienten  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_n$  man im hier behandelten konkreten Anwendungsfall eventuell verzichten kann. Dazu dient neben theoretischen Erwägungen auch der qualitative Vergleich der experimentell gewonnenen Ergebnisse mit denen, die durch Nachbildung der Bewegungsdgl. am Analogrechner gewonnen wurden. Aus diesem Grunde soll zunächst das Analogrechenprogramm erläutert werden.

Ausgehend von Glg. (26) geschahen Programmierung und Auswertung des Stoßvorganges wegen der bekannt schwierigen Arbeit mit Dividierschaltungen in zwei Etappen:

1. Untersuchung des Stoßvorganges
  - 1.1.  $m_0 \approx 0$  (große Stoßmassen)
  - 1.2.  $m_0 \neq 0$  (Anwendungsfall Drucktechnik)
2. Untersuchung der Zwangsschwingung  
bei harmonischer Erregung

Die erregten Schwingungen wurden in das Programm aufgenommen, um zusätzliche Aussagen über den Charakter der Dgl. zu gewinnen. Verwendet wurde die Rechenanlage ENDIM 2000 mit Sichtgerät und  $x$ - $y$ -Schreiber.



### Pendelversuch - große Stoßmassen ( $m_0 \approx 0$ )

Mit  $\eta$  wird der Ausschlag am Registriergerät der Rechenanlage bezeichnet. Dann nimmt Glg. (26) die Form

$$\ddot{\eta} = -\alpha_1 \dot{\eta}/\eta - \alpha_2 \eta - \alpha_3 \dot{\eta}^2 - \alpha_4 |\eta| |\dot{\eta}| \dot{\eta} - \alpha_5 \eta^2 |\dot{\eta}| \dot{\eta} - \alpha_6 |\eta|/\eta - \alpha_8 \eta^3$$
an. Den Koppelplan dazu zeigt Bild 21. Die Ausschlußmöglichkeiten des Oszilloskops und des Schreibers sind so gewählt, daß die Funktionen

$$\ddot{\eta}(t), \dot{\eta}(t), \eta(t), \ddot{\eta}(\eta), \dot{\eta}(\eta) \text{ und } \ddot{\eta}(\dot{\eta})$$

darstellbar sind. Jeder verwendete Verstärker war anwählbar. Es ist nützlich, die Dgl. schrittweise aufzubauen und zu testen. Der Einbau zweier Summierer S 1 und S 2 war notwendig wegen der beschränkten Anzahl Eingänge eines Summierers. Über das Potentiometer P 1 wird die Auftreffgeschwindigkeit  $\dot{\eta}_0$  eingestellt, und Potentiometer P 2 dient zum "statischen Durchfahren" der Dgl., d.h. zum Aufnehmen der Funktion  $F_R(x)$ .

### Anwendungsfall Drucktechnik ( $m_0 \neq 0$ )

Der Koppelplan nach Bild 21 wird durch eine geeignete Dividierschaltung ergänzt und die Forderung  $\alpha_7 \stackrel{!}{=} 0$  aufgehoben. Es wird

$$\ddot{\eta} = \frac{-\alpha_1 \dot{\eta}/\eta - \alpha_2 \eta - \alpha_3 \dot{\eta}^2 - \alpha_4 |\eta| |\dot{\eta}| \dot{\eta} - \alpha_5 \eta^2 |\dot{\eta}| \dot{\eta} - \alpha_6 |\eta|/\eta - \alpha_7 \dot{\eta}^2 \eta - \alpha_8 \eta^3}{\alpha_9 + \alpha_{10} \eta^2}$$

Eine möglicherweise instabile Dividierschaltung wird dadurch umgangen, daß

$$P = \frac{1}{\alpha_9 + \alpha_{10} \eta^2} \text{ als Lösung einer Dgl. angesehen wird.}$$

Die Dgl. findet man durch Differentiation:

$$\dot{P} = -2 P^2 \alpha_{10} \eta \dot{\eta} = -\alpha_7 P^2 \eta \dot{\eta} \quad (27)$$

Bild 22 zeigt den Koppelplan. Darin dient Potentiometer P 3 der Einstellung des Wertes  $m^{-1}$ . Es ist zu beachten, daß die Einstellwerte der Potentiometer P 3 und  $\alpha_1$  bis  $\alpha_8$  untereinander in Beziehung stehen.

### Untersuchung der erregten Schwingung

Die Nachbildung der harmonisch erregten Schwingung (für  $m \gg m_0 x^2$ , also  $m_0 \approx 0$ ) dient der Erlangung weiterer Erkenntnisse über die Eigenschaften der vorgeschlagenen Stoßdgl.. In Bild 23 ist die Erregerschaltung abgebildet. Soll die homogene Schwingung betrachtet werden, dann sind die Potentiometer P 4 und P 5 in Nullstellung zu

bringen. Über Potentiometer P 6 ist die Erregerfrequenz  $\Omega$  einstellbar. Die Erregerschwingung ist harmonisch:  $y = y_0 \sin \Omega t$ .

Wie oben bereits dargelegt, wurde bei den Aufnahmen des Druckvorganges am Pendelversuchsstand stets  $\Delta t > 0$  registriert; die beiden Extremwerte von  $x(t)$  und  $-\ddot{x}(t)$  fallen also zeitlich nicht zusammen.

Aus der Tatsache, daß  $-\ddot{x}(x)$  wegen des Energieverlustes beim Stoß eine zweiwertige Funktion über alle  $x$  sein muß, folgt, daß im Falle  $\Delta t = 0$  die Hysteresefunktion bei  $x = x_E$  bzw.  $-\ddot{x} = -\ddot{x}_E$  einen Knick haben müßte. Theoretisch würde dieser Fall eintreten, wenn  $b_1 = 0$  gesetzt wird. Dann folgt nämlich aus Glg. (26) für  $m_0 = 0$ :

$$m\ddot{x}'(x) = -(2a_1b_2x\operatorname{sgn}(x)\ddot{x} + 2a_2b_2x^2\ddot{x})\operatorname{sgn}(\dot{x}) - F_R'(x) - (a_1b_2\operatorname{sgn}(x)\dot{x}^2 + 2a_2b_2x\dot{x}^2)\operatorname{sgn}(\dot{x})$$

Der Faktor  $\operatorname{sgn}(\dot{x})$  bewirkt, daß links- und rechtsseitiger Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_E} \ddot{x}'$  ungleich sind. Da ein solcher Knick nie beobachtet wurde, ist klar, daß auf  $b_1$  nicht verzichtet werden kann. Diese Schlußfolgerung ist von weitreichender Bedeutung. Könnte nämlich  $b_1 \approx 0$  gesetzt werden, dann wäre für Glg. (26) in jedem Falle eine geschlossene Lösung möglich /19/. Mit  $b_1 \neq 0$  wächst  $\ddot{x}'(x = x_E)$  wegen  $\dot{x}' = \ddot{x}/\dot{x}$  über alle Grenzen (ebenfalls in Übereinstimmung mit dem Experiment). Die Auswirkung des Faktors  $\operatorname{sgn}(\dot{x})$  wird damit bedeutungslos. Durch die Nachbildung der Bewegungsdgl. am Analogrechner kann dieser Sachverhalt mühelos gezeigt werden (Bild 24). Bei allen Versuchen mit dem Stoßpendel zeigte sich, daß  $|\ddot{x}|$  wieder zu Null wird, bevor der Stoßkörper das Ausgangsniveau  $x = 0$  wieder erreicht hat (vergl. D 1). Beim Schwingungssystem bedeutet das die Existenz des in Bild 24 schraffierten Gebietes. Es ist dies genau die Energie, die eine schwingende Masse während einer Halbschwingung auf Grund der Nachwirkung der teilelastischen Feder an diese wieder abgeben wird (vergl. Bild 13.3). Auch hier zeigt sich ein grundlegender Unterschied zu den Messungen in /1/, bei denen wegen des gewählten Versuchsaufbaus sowohl die Nachwirkung der Gummiwalze als auch die des Papiers nicht erfaßt werden können. Demzufolge erreichen dort  $x$  und  $\ddot{x}$  gleichzeitig wieder den Nullwert, und es wird nachwirkungsfreies verlustbehaftetes Material vorgetäuscht (Bild 25).

Unter 1.6. wird gezeigt, daß die Federkennlinie des Walzenmaterials sowohl mit als auch ohne Papierlagen im wesentlichen durch eine quadratische Abhängigkeit zwischen der statischen Belastung und der Eindringung charakterisiert wird. Es ist damit in Glg. (26)

$c_1 = c_3 = 0$  zu setzen. Damit folgt für den Anstieg

$m\ddot{x}'(x = 0) = -a_1(b_1\dot{x}_0 + b_2\dot{x}_0^2)$ , d.h. der Anstieg der Hysteresefunktion im Nullpunkt ist von Null verschieden und abhängig von  $\dot{x}_0$ .

Dieser Sachverhalt fand im Experiment stets seine Bestätigung (Bild 26).

Damit ist klar, daß ebenso wie auf  $b_1$  auch auf  $a_1$  nicht verzichtet werden kann. Es läßt sich damit auch sofort eine Abschätzung bezüglich des Faktors  $b_2$  angeben. In D 7 wird stellvertretend für alle Versuche an mehreren Beispielen gezeigt, daß  $m\ddot{x}'(x=0)$  etwa linear abhängig ist von  $\dot{x}_0$ . Die Meßwerte sind gerade in der Umgebung des Nullpunktes schwer aufzunehmen und daher mit relativ großen Fehlern behaftet. Das Einzeichnen einer Geraden, die in Extrapolation wahrscheinlich durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft und damit ebenfalls die Annahme  $c_1 = 0$  bestätigt, in die Schar der Meßpunkte von D 7 ist daher gerechtfertigt. Es vereinfacht sich damit die Dgl. (26) durch die Erkenntnis  $b_2 \approx 0$  weiter.

Im Falle  $a_2 \neq 0$  wird im Vergleich zu  $a_2 = 0$  (Bild 27) die maximale Eindringung erst bei wieder kleineren Kontaktkräften erreicht. Die Funktion wird damit insgesamt gesehen "bauchiger" und rein qualitativ betrachtet den experimentell gewonnenen Kurven ähnlicher. Für eine theoretische Abschätzung des Koeffizienten  $a_2$  wurde keine Möglichkeit gefunden.

Es ergibt sich damit, daß die Dgl.

$$m\ddot{x} = -(a_1 x \operatorname{sgn}(x) + a_2 x^2) b_1 \dot{x} - c_n x^n (\operatorname{sgn}(x))^{3-n}, \quad n=2 \text{ bzw. } 3 \quad (26.1)$$

als mathematische Formulierung des Pendelstoßes (also  $m \gg m_0 x^2$ ) in Betracht kommt. Die genaue Wegabhängigkeit der Dämpfung muß aber im Experiment bestimmt werden (s. 1.6.1.). Es ist dadurch möglich, daß dann vereinfachend  $a_2 = 0$  gesetzt werden kann.

Über den Wert des Index bzw. Exponenten  $n$  entscheidet das Experiment (s. 1.6.2.).

Für das praktisch ausgeführte Druckelement gilt entsprechend die Erweiterung der Dgl. durch Berücksichtigung des Terms  $m_0 x^2$ :

$$(m+m_0 x^2) \ddot{x} = -(a_1 x \operatorname{sgn}(x) + a_2 x^2) b_1 \dot{x} - c_n x^n (\operatorname{sgn}(x))^{3-n} - 2m_0 x \dot{x}^2, \quad n=2 \text{ bzw. } 3 \quad (26.2)$$

Das Verhalten des autonomen Verbandes (26.1) bei Variation von  $\dot{x}_0 \hat{=} \dot{x}_0$  für  $n=2$  und  $n=3$  zeigen die Bilder 28.1 und 28.2. Es sind dort die wichtigsten qualitativen Merkmale des Verbandes zu erkennen (vergl. unter 1.7. die Diagramme 9.3). Bereits aus der Dgl. ist abzulesen, daß keine periodische Lösung, also kein Grenzzyklus, existieren kann, da die Bewegung an jeder Stelle gedämpft ist. Es erübrigen sich also die Prüfung gewisser hinreichender Bedingungen für die Existenz von Grenzzyklen und dann notwendige Stabilitätsuntersuchungen. Grenzzyklen hätten im hier betrachteten physikali-



schen Zusammenhang keinen Sinn; die Dgl. müßte dann verworfen werden.

Die Untersuchung des Einflusses von  $m_0$  auf die Gestalt der Lösungsfunktion von Glg. (26.2) sind an der Analogrechenanlage Grenzen gesetzt. Es ist  $P(t=0) = 1/\alpha_9$ . Damit ist  $\alpha_9 \hat{=} m$  variabel einstellbar in dem Intervall  $[1; \infty)$ . Für  $\alpha_{10} \hat{=} m_0$  ergibt sich der Einstellbereich  $[0; 0,5]$ . Der größte Wert, den das Verhältnis  $\alpha_{10} \eta^2 / \alpha_9 \hat{=} m_0 x^2 / m$  erreichen kann, beträgt 0,5 im Falle  $\eta = 1$ . Den Einfluß von  $m_0$  auf die wichtigsten Abhängigkeiten zeigt Bild 29 für den Fall  $n = 3$ . Es zeigt sich, daß die Vergrößerung des Verhältnisses  $m_0/m$  entweder durch Vergrößerung von  $m_0$  (Bild 29) oder Verringerung von  $m$  eine Abnahme von  $x_E$  bewirkt (vergl. D 2.2). Ein Vergleich zwischen diesen Erkenntnissen und dem Experiment ist für die Stoßwege und Stoßkräfte nicht möglich, da im Experiment nur sehr kleine Verhältnisse  $m_0/m$  realisiert werden konnten.

Gleiches trifft zu bezüglich der Stoßdauer. Ebenso wie Glg. (26.1) besitzt auch Glg. (26.2) keinen Grenzyklus, da die Levinson/Smith-Bedingung  $\frac{f(x)b_1 - 2m_0 x \dot{x}}{\bar{m}(x)} < 0$  für  $x = 0$  und  $\dot{x} = 0$  nicht erfüllt ist. Bei der Untersuchung der Zwangsschwingung

$$m\ddot{x} + (a_1 x \operatorname{sgn}(x) + a_2 x^2) b_1 \dot{x} + c_n x^n (\operatorname{sgn}(x))^{3-n} = \gamma_0 \sin \Omega t, \quad n=2 \text{ bzw. } 3 \quad (28)$$

ist beim Einstellen der Potentiometer an der Analogrechenanlage zu beachten, daß bei Variation der Erregerfrequenz am Potentiometer P 6 gleichzeitig auch P 4 entsprechend nachzuregulieren ist, damit die Amplitude  $\gamma_0$  der Erregerschwingung konstant bleibt.

Es interessiert hier auch der Vergleich mit den Aussagen in Abschnitt 1.5.1.1. und den Ergebnissen in 1.6. Von den Fragen nach der Existenz einer Lösung mit der Periode  $2\pi/\Omega$  (Bild 23), deren Ermittlung und anschließenden Stabilitätsuntersuchungen hat unter den hier geltenden Aspekten vorrangig die erste Frage einen praktischen Nutzen. In der experimentellen Ausführung der Zwangsschwingung ist lediglich von der in das Druckelement eingeleiteten Erregerkraft bekannt, daß sie harmonisch abläuft, während  $x(t)$  nicht gemessen werden kann (vergl. Versuche in Abschnitt 1.6.). Eine harmonische Verformung ist aber Voraussetzung für die Richtigkeit des dann gemessenen Wertes  $\gamma$  (siehe 1.5.1.1.). Die Existenzfrage läßt sich recht schnell nach den Bedingungen von Mizohata und

Yamaguti (in /17/) lösen. Danach hat Glg. (28) mindestens eine periodische Lösung mit der Periode  $2\pi/\Omega$ . Bild 30 bestätigt das. Die eigentliche Ermittlung der Lösungsfunktion kann über geeignete Näherungsmethoden vorgenommen werden (z.B. Mittelungs-

methode von Krylow - Bogoljubow). Die Stabilitätsdiskussion kann nach der Methode von Ljapunow geführt werden.

Ergänzend sei Bild 31 eingefügt, aus dem neben dem Amplituden- und Phasenfrequenzgang sehr gut der Einfluß der Erregerfrequenz auf die Form der Hystereseschleife zu erkennen ist. Bei sehr kleinen Erregerfrequenzen weicht die Verformung des Materials, das der angegebenen Dgl. genügt, zunehmend vom harmonischen Verlauf ab. Diese Dgl. kann damit zur Nachbildung z.B. auch von in der Elektrotechnik vorkommenden Hysteresefunktionen verwendet werden (Erläuterung dieser Problematik z.B. in /58/).

Im Gegensatz zum Sorokinschen Ansatz nach Glg. (3) kann der Dämpfungsterm  $F_D$  nach Glg. (22) mit  $b_2 = 0$  wegen der zusätzlichen Abhängigkeit vom Momentanwert der Elongation nicht indirekt proportional der Erregerfrequenz sein, auch nicht, wenn - wie bei Sorokin -  $h(\dot{x}) = b_1 \dot{x} / \Omega$  gesetzt wird. Damit ist dann auch  $\Delta W \neq f(\Omega)$  nicht erfüllt. Ebenso verhält es sich bei der Rückrechnung von Glg. (4) zu Glg. (2) unter Beachtung des Ansatzes (22). Im Gegensatz zum Sorokinschen Ansatz stellt sich bei quasistatischer Verformung keine ellipsenförmige Hystereseschleife ein.

Es kann damit abschließend festgestellt werden, daß Glg. (28) mit der vorhandenen periodischen Lösung harmonischer Form zwar die Grundvoraussetzung für die Anwendung der Theorie der Werkstoffdämpfung bei harmonischer Verformung der Probe aufweist, ansonsten aber keine der experimentell gesicherten Eigenschaften der Werkstoffdämpfung besitzt. Für die Erfassung des Stoßvorganges ist sie geeignet, nicht aber für die Nachbildung des Bewegungsvorganges bei erzwungenen harmonischen Schwingungen unter den Bedingungen der Werkstoffdämpfung.

#### 1.5.2. Zur Lösung der Stoß-Differentialgleichung

Auch bei der Bestimmung der allgemeinen Lösung der Stoß-Dgl. macht sich eine Unterteilung notwendig in die Anwendungsfälle

- a) Masse  $m$  des stoßenden Körpers ist wesentlich größer als der bewegte Masseanteil  $m_0 x^2$  des ruhenden gestoßenen Körpers (Stoß eines inkompressiblen Körpers gegen eine teilelastische Wand):  
 $m \gg m_0 x^2$
- b)  $m_0 x^2$  ist gegenüber  $m$  nicht mehr vernachlässigbar (Anwendungsfall Mosaikdruck)

Aus 1.5.1.3. geht hervor, daß die Dgln. (26.1) bzw. (26.2) zur Beschreibung dieser Anwendungsfälle herangezogen werden können. Abge-

sehen von Spezialfällen ist es nicht möglich, diese nichtlinearen Dgln. durch elementare Methoden zu integrieren. Es müssen Näherungsmethoden angewendet werden, bei denen entweder ein das allgemeine Integral liefernder unendlicher Rechenprozeß bei Erreichen einer bestimmten Entwicklungsstufe abgebrochen oder eine Annäherung an die exakte Lösung durch bestimmte andere Verfahren erreicht wird. Division durch den Koeffizienten der höchsten Ableitung bringt (26.2) auf die Form

$$\ddot{x} + F_{\bar{G}}(x, \dot{x}) = \ddot{x} + F_{\bar{D}}(x, \dot{x}) + F_{\bar{R}}(x) + F_{\bar{M}}(x, \dot{x}) = 0 \quad (26.3)$$

$$\text{mit } F_{\bar{D}}(x, \dot{x}) = \frac{a_1 x \operatorname{sgn}(x) + a_2 x^2}{m + m_0 x^2} b_1 \dot{x} := f_1(x) \dot{x}$$

$$F_{\bar{R}}(x) = \frac{c_n x^n (\operatorname{sgn}(x))^{3-n}}{m + m_0 x^2} := f_0(x) \text{ mit } n=2 \text{ bzw. } 3$$

$$F_{\bar{M}}(x, \dot{x}) = \frac{2m_0 x}{m + m_0 x^2} \dot{x}^2 := f_2(x) \dot{x}^2$$

Mit  $F_{\bar{R}}(x) \equiv x$  und  $m_0 \equiv 0$  ist (26.3) als Liénardsche Dgl. bekannt und geht - wenn außerdem  $f_1(x) \equiv \sqrt{x^2 - 1}$  - in die van der Polsche Dgl. über. Diese beiden Differentialgleichungen werden in der Literatur ausführlich behandelt /z.B. 17, 18/. Die Lösung von Dgln. der Art (26.3) wird meist so in Angriff genommen, daß die Betrachtung in die Phasenebene verlagert wird. Man gelangt so zu einer nichtlinearen Dgl. erster Ordnung, die als Abelsche Dgl. zweiter Art bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} \dot{x} &:= y \\ yy' + f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x) &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Für einige Funktionen  $f_0, f_1, f_2$ , die zueinander in bestimmten Beziehungen stehen, sind bei Abel /20/ Lösungen  $y(x)$  angegeben. Die dort festgelegten Voraussetzungen bezüglich  $f_0, f_1, f_2$  treffen hier aber nicht zu.

Bevor verschiedene Näherungsmethoden zur Lösung von (26.3) betrachtet werden, soll der Sonderfall einer in  $\dot{x}$  quadratischen Dämpfungsfunktion erwähnt werden. Es ist hierbei prinzipiell eine geschlossene Lösung möglich.



Sonderfall  $F_{\bar{D}}(x, \dot{x}) = \frac{\tilde{k}|\dot{x}|}{\bar{m}(x)} \dot{x}^2 \operatorname{sgn}(\dot{x})$  ;  $c_2 = 0$  oder  $c_3 = 0$  /19/

Es ist zwar in 1.5.1.3. gezeigt worden, daß für die hier durchgeführten Experimente ein dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionaler Dämpfungsterm nicht in Frage kommt, aber andere Versuche (z.B. in /1/) ergaben Kraft-Weg-Kennlinien, bei denen man vergleichsweise hierzu von einem Knick der Funktion  $-\ddot{x}(x)$  bei  $-\ddot{x}_E$  sprechen kann.

Für  $y^2 := u(x)$  resultiert aus (28) die lineare Dgl.

$$u' + 2f_3 u + 2f_0 = 0 \quad (29)$$

mit  $f_3 = \frac{2m_0 x}{\bar{m}(x)} + \frac{\tilde{k}|\dot{x}|}{\bar{m}(x)} \operatorname{sgn}(\dot{x})$  .

Die integrierte Funktion  $u$  lautet:

$$u(x) = C e^{-2\int f_3 dx} - 2e^{-2\int f_3 dx} \cdot \int f_0 e^{2\int f_3 dx} dx \quad (30)$$

Es ist  $\int f_3 dx$  leicht aufzuschreiben und auch  $f_0 e^{2\int f_3 dx}$  ist durch Grundintegrale zu finden und partiell zu integrieren. Allerdings steht  $\operatorname{sgn}(\dot{x})$  im Exponenten von  $m(x)$  und damit zerfällt für jedes  $c_n$  das Ergebnis in zwei Teile.

Es wird hier davon abgesehen, die vier Lösungen anzugeben. Wesentlich einfacher wird das Ergebnis für  $m_0 = 0$ . Die Umformung in

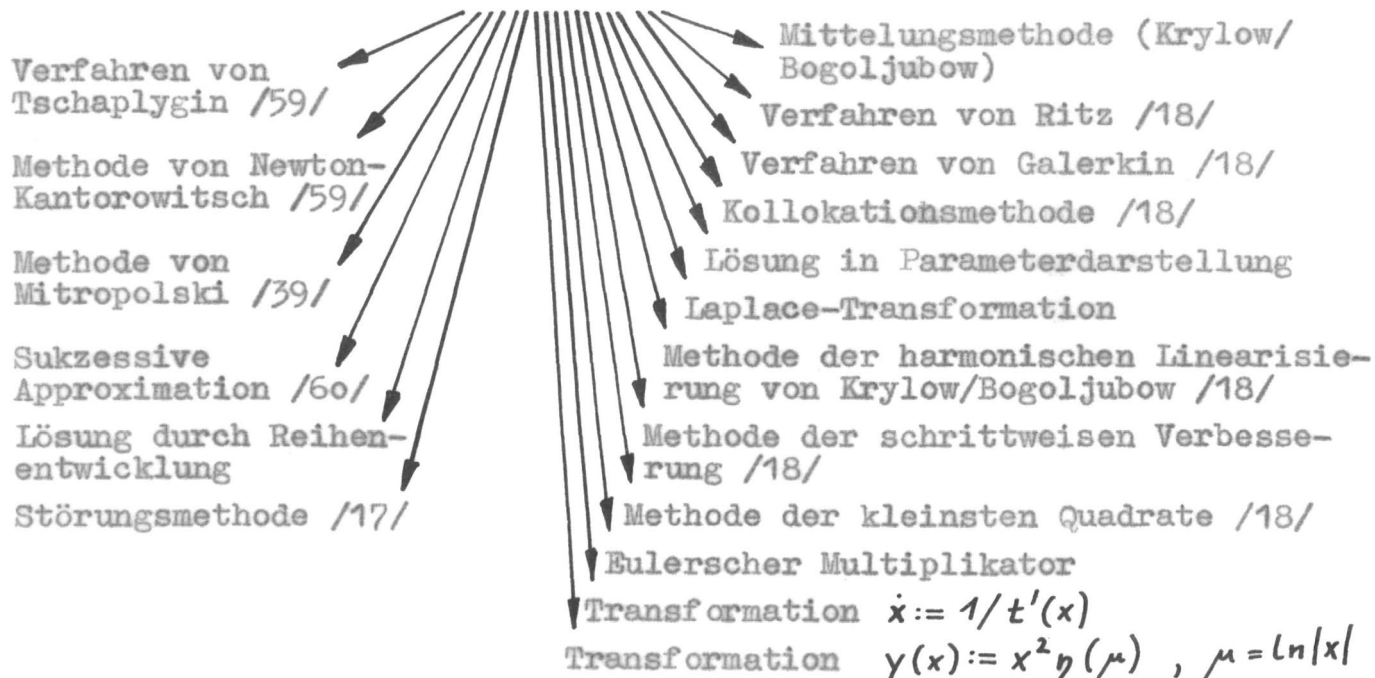
$$t = t(x) = \int \frac{dx}{u^{1/2}}$$

gelingt über Partialbruchzerlegung. Den Funktionsverlauf für  $m_0 = 0$  und  $c_3 = 0$  zeigt Bild 32 unter Variation von  $\dot{x}_0$ . Es sei noch erwähnt, daß eine geschlossene Lösung für beliebige Funktionen  $F_{\bar{R}}(x)$  und  $f_1(x)$  in  $F_{\bar{D}}(x, \dot{x}) = f_1(x) \dot{x}^2 \operatorname{sgn}(\dot{x})$  existiert.

Zur Lösung der Dgl. (26.3) bzw. des Systems (28) bieten sich z.B. folgende Näherungsmethoden an:

$$y := \dot{x}$$

$$yy' + f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x) = 0$$



Es sollen einige der Methoden betrachtet werden. Die Lösungen werden untereinander und mit dem Experiment verglichen.

Die Lösungsverfahren sind dabei in zwei Gruppen einteilbar:

- Verfahren, die die Verlagerung in die Phasenebene  $(y, x)$  notwendig machen (Dgl. (28)). Dabei sind die Stetigkeit der Funktion  $y' = g(x, y)$  und die Erfüllung der Lipschitz-Bedingung mit Ausnahme der Geraden  $(x, y=0)$  im gesamten interessierenden Gebiet  $(x \geq 0, y)$  der Phasenebene gewährleistet. Die Lösungsverfahren dieser Gruppe müssen also stets getrennt für  $\dot{x} > 0$  und  $\dot{x} < 0$  angesetzt werden. Während für das Intervall  $y > 0$  die Anfangsbedingung  $y_0(x=0) = \dot{x}_0 > 0$  bekannt ist, kann für das Intervall  $y < 0$  keine Randbedingung aufgestellt werden. Die Lösung bleibt damit auf das erste Intervall beschränkt. Aus der Zwischenlösung  $y(x)$  wird dann die Endlösung  $t(x) = \int \frac{dx}{y(x)}$  berechnet. Setzt man demgegenüber  $\dot{x} := \frac{1}{z}$ , so formt sich (26.3) in eine A b e l s c h e Dgl. e r s t e r Art um:

$$z' = f_0 z^3 + f_1 z^2 + f_2 z$$

Hier sind zwar für die Behandlung der Dgl. die Stetigkeits- und die Lipschitz-Bedingung für die gesamte  $(x, \dot{x})$ -Ebene erfüllt, die Unterteilung in die beiden Halbebenen  $(x, \dot{x} > 0)$  und  $(x, \dot{x} < 0)$  macht

sich aber entweder im Laufe der Berechnung von  $z = z(x)$ , spätestens jedoch bei der Rücktransformation  $z = \frac{1}{x}$  erforderlich (siehe Methode "Transformation  $\dot{x} = 1/t'(x)$ ").

- Verfahren, die von der Dgl. zweiter Ordnung ausgehen. Dabei wird für die Lösungsfindung eine Unterteilung in die Gebiete  $y > 0$  bzw.  $y < 0$  nicht notwendig. Als Beispiel dafür möge die Methode der Laplace-Transformation dienen.

### Laplace-Transformation

Die  $\mathcal{L}$ -Transformation ist zwar als lineare Transformation speziell für lineare Probleme ausgelegt; trotzdem kann sie auch hier Verwendung finden. Durch die Anwendung der  $\mathcal{L}$ -Transformation vereinfacht sich der Approximationsprozeß. Wegen des Rechenaufwandes muß man sich meist mit wenigen Näherungen begnügen. Es ist dann zu versuchen, die Grenzfunktion, an die sich die Näherungen anschmiegen, zu finden. Da im hier vorliegenden Fall nur die erste Halbperiode der freien Schwingung interessant ist, bestehen gegen diese Methode keine Einwände. Andere Aussagen über die Dgl., die so nicht getroffen werden können (z.B. Stabilität), hätten ohnehin höchstens theoretisches Interesse. Es gibt eine Vielzahl von Verfahren, die Lösung von nichtlinearen Dgln. als Reihen nach Potenzen eines Parameters anzusetzen und die einzelnen Glieder dann unter Verwendung der  $\mathcal{L}$ -Transformation zu berechnen. Hier fand die in /64/ zitierte Möglichkeit Verwendung. Unbedingt zu beachten ist dabei lediglich die Tatsache, daß wegen der Instabilität der  $\mathcal{L}^{-1}$ -Transformation trotz teilweise recht umfangreicher Bildfunktionen an diesen keine vereinfachenden Operationen vorzunehmen sind. Bei der Berechnung führen die beiden Anwendungsformen

a)  $m \gg m_0 x^2$  bzw.  $m_0 := 0$   
und

b)  $m_0 \neq 0$

auf verschiedene Schwierigkeitsstufen. Während im Falle a) wegen  $n \neq 1$  zur Rücktransformation in den Originalraum nicht einmal Partialbruchzerlegung erforderlich wird und sowohl die  $\mathcal{L}$ - als auch die  $\mathcal{L}^{-1}$ -Transformation mühelos vorgenommen werden können, machen sich im Falle b) umfangreichere Betrachtungen notwendig.

#### Anwendungsfall a)

$(m_0 := 0)$

Beschränkt man sich auf die erste positive Halbschwingung ( $\text{sgn}(x)=1$ ),



dann nimmt die Dgl. (26.3) die Form

$$\ddot{x} + \frac{a_1 b_1}{m} \dot{x} + \frac{a_2 b_1}{m} x^2 \dot{x} + \frac{c_n}{m} x^n = 0, \quad n = 2 \text{ bzw. } 3$$

an. Für eine allgemeingültige Berechnung ist es sinnvoll,  $F_R(x)$  wie in (25) als Summe einzuführen für  $n = 2$  und  $n = 3$ , um dann im Ergebnis wieder einzelne Koeffizienten  $c_n$  ebenso wie  $a_1$  oder  $a_2$  Null zu setzen. Vereinfachend folgt

$$\ddot{x} + k_1 \dot{x} + k_2 x^2 \dot{x} + \sum_{n=2}^3 \bar{c}_n x^n = 0, \quad (31)$$

$$\text{mit } k_1 = \frac{a_1 b_1}{m}$$

$$k_2 = \frac{a_2 b_1}{m}$$

$$\bar{c}_n = \frac{c_n}{m}$$

Linearer und nichtlinearer Teil der Dgl. werden formal getrennt. Anwendung des Differentiationssatzes liefert dann unter Beachtung von  $x(0)=0$  und  $\dot{x}(0)=v_0$  die Bildgleichung

$$X(s) = \frac{1}{s^2} \left( v_0 - \mathcal{L} \{ k_1 \dot{x} + k_2 x^2 \dot{x} + \bar{c}_2 x^2 + \bar{c}_3 x^3 \} \right) = 0.$$

Wird der nichtlineare Teil vernachlässigt, ergibt sich als 1. Näherung:

$$x_1(t) = v_0 t.$$

$x_1(t)$  in den nichtlinearen Teil eingesetzt liefert die 2. Näherung:

$$x_2(t) = v_0 t - \frac{k_1 v_0^2}{6} t^3 - \frac{v_0^2 (\bar{c}_2 + k_2 v_0)}{12} t^4 - \frac{\bar{c}_3 v_0^3}{20} t^5 \quad (32.1)$$

Wird dieses Verfahren mit  $x_2$  ein weiteres Mal wiederholt, erhöht sich der Schreibaufwand bereits beträchtlich. Sind  $A_i$  die Koeffizienten der Potenzen  $t^i$ , dann gilt im Bildraum

$$X_3(s) = \frac{v_0}{s^2} - \sum_{i=1}^{15} A_i \frac{i!}{s^{i+3}}.$$

Damit folgt dann

$$x_3(t) = v_0 t - \sum_{i=1}^{15} A_i \frac{t^{i+2}}{(i+2)!} \quad (32.2)$$

Die Koeffizienten  $A_i$  sind in Tabelle 5 zusammengefaßt.

Anwendungsfall b)

$$(m_0 \neq 0)$$

Dgl. (26.2) wird umgeschrieben in

$$\ddot{x} + \frac{1}{m+m_0x^2}(a_1b_1x\dot{x} + a_2b_1x^2\dot{x} + c_2x^2 + c_3x^3 + 2m_0x\dot{x}^2) = 0 \quad (33)$$

Wie im Fall a) wird auch hier  $\text{sgn}(x) = 1$  gesetzt. Als erste Näherung ist auch hier

$$X_1(s) = \frac{v_0}{s^2}$$

zu schreiben. Wird  $x_1(t)$  eingesetzt, folgt für den nichtlinearen Teil der Dgl.

$$\mathcal{L} \left\{ B \frac{t}{\beta^2+t^2} + C \frac{t^2}{\beta^2+t^2} - D \frac{t^3}{\beta^2+t^2} \right\},$$

wobei  $\beta^2 = \frac{m}{m_0 v_0^2}$  sowie

$$B = \frac{a_1 b_1 + 2m_0 v_0}{m_0},$$

$$C = \frac{a_2 b_1 v_0 + c_2}{m_0} \text{ und}$$

$$D = \frac{c_3 v_0}{m_0}.$$

Wegen der Division durch  $m_0$  ist dieser Fall im Ergebnis nicht auf den vorhergehenden reduzierbar. Die erforderlichen Laplace-Integrale sind in /65/ berechnet. Die Übersetzung liefert:

$$\begin{aligned} X_2(s) = & \frac{v_0}{s^2} - \frac{B}{s^2} [-Ci(\beta s) \cos(\beta s) - Si(\beta s) \sin(\beta s)] \\ & - \frac{C}{s^2} [-\beta (Ci(\beta s) \sin(\beta s) - Si(\beta s) \cos(\beta s)) + \frac{1}{s}] \\ & - \frac{D}{s^2} [\beta^2 (Ci(\beta s) \cos(\beta s) + Si(\beta s) \sin(\beta s)) + \frac{1}{s^2}]. \end{aligned}$$

Die einzelnen Klammerausdrücke dividiert durch  $s^2$  können nicht als einheitliche Funktionen rückübersetzt werden. Die entsprechenden Originalfunktionen werden gefaltet:

$$x_2(t) = v_0 t - Bt * \frac{t}{\beta^2+t^2} - Ct * \frac{t^2}{\beta^2+t^2} - Dt * \frac{t^3}{\beta^2+t^2}.$$

Somit wird

$$\begin{aligned} x_2(t) = & (v_0 + B - D\beta^2)t - \frac{C}{2}t^2 - \frac{D}{6}t^3 + (D\beta^3 - B\beta)\arctan\left(\frac{t}{\beta}\right) \\ & + C\beta\arctan\left(\frac{t}{\beta}\right) \cdot t - \frac{C\beta^2}{2} [\ln|\beta^2 + t^2| - \ln|\beta^2|] \\ & + \left(\frac{D\beta^2}{2} - \frac{B}{2}\right) [\ln|\beta^2 + t^2| - \ln|\beta^2|] \cdot t \end{aligned} \quad (34)$$

Das Absolutglied  $C\beta^2 \ln|\beta^2|/2$  verschwindet bei  $t = 0$  (Forderung  $x(0) \doteq 0$  bleibt erfüllt). Die Argumente der  $\ln$ -Funktionen sind dimensionslos einzusetzen. Auf die Bestimmung der dritten Näherung wird verzichtet.

#### Lösung durch Reihenentwicklung

Die Lösung der Stoßdgl. (26.3) kann in Form der Mac Laurinschen Reihe

$$x(t) = \sum_v \frac{\overset{v}{x}(0)}{v!} t^v \quad (35)$$

aufgeschrieben werden, und zwar für alle die  $t$ -Werte, in denen die Reihe konvergiert. Mit den Bedingungen

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

und  $\ddot{x}(0) = 0$

folgt für  $v = 7$  und  $m_0 = 0$  die Näherung:

$$\begin{aligned} x(t) \approx & v_0 t - \frac{k_1 v_0^2}{6} t^3 - \frac{k_2 v_0^3 + \bar{c}_2 v_0^2}{12} t^4 \\ & + \frac{2k_1^2 v_0^3 - 3\bar{c}_3 v_0^3}{60} t^5 \\ & + \frac{9k_1 \bar{c}_2 v_0^3 + 13k_1 k_2 v_0^4}{360} t^6 \\ & + \frac{10\bar{c}_2^2 v_0^3 + 40k_2 \bar{c}_2 v_0^4 + 30k_2^2 v_0^5 + 48k_1 \bar{c}_3 v_0^4 - 17k_1^3 v_0^4}{2520} t^7 \end{aligned} \quad (36)$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist nicht angebbar und damit ist auch die Frage nach der Konvergenz der Reihe nicht zu beantworten. Die Näherung (36) bietet sich natürlich als Anlaufrechnung zum Differenzenschemaverfahren an. Numerische Lösungsverfahren - sowohl maschinelle als auch manuelle - liefern aber keine neuen Erkenntnisse, da die prinzipielle Anwendbarkeit der Dgl. (26) bereits nachgewie-



sen ist. Näherungslösungen in analytischer Form bieten den Vorteil, den Einfluß bestimmter Parameter anhand der Struktur der Lösungsgleichung unmittelbar zu erkennen. Auf numerische Verfahren wird daher verzichtet.

Der Vergleich der Glgn. (36) und (32.2) zeigt Übereinstimmung im Zusammenhang der Parameter  $v_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $c_2$  und  $c_3$ . Abweichungen zeigen sich wie erwartet in den Zahlenfaktoren. Wenn die Parameter experimentell bestimmt sind, zeigt der Vergleich untereinander und mit dem Experiment die Unterschiede (vgl. 1.7.).

Zur Anwendbarkeit der anderen hier erwähnten Verfahren folgen im Pkt. 4 im Teil II der Arbeit kurze Erläuterungen.

#### 1.6. Experimentelle Bestimmung von Dämpfung und Steifigkeit des gestoßenen Körpers<sup>1)</sup>

Es ist bereits dargelegt worden, daß das Dämpfungsvermögen und die Steifigkeit des gestoßenen Körpers nicht allgemeingültig zu ermitteln sind, sondern von speziellen Gegebenheiten des Stoßkörpersystems abhängen. So ist z.B. die Steifigkeit selbstverständlich von der Größe der Kontaktfläche abhängig. Ebenso wird auch die Dämpfung vom bewegten Materialvolumen des gestoßenen Körpers bestimmt. Auch die Umgebungsbedingungen (z.B. Temperatur) haben Einfluß auf die Eigenschaften des gestoßenen Materials.

##### 1.6.1. Dämpfung

###### 1.6.1.1. Bestimmungsverfahren

Zur Bestimmung der Materialdämpfung werden in der Literatur meist Verfahren genannt, die auf der Messung der Verlustenergie  $\Delta W$  (s. Bild 14) basieren. Es wird also eine harmonische Erregung vorausgesetzt. Neben den zwangserregten finden auch die freien Schwingungen Verwendung. Schließlich existiert noch eine dritte Gruppe von Verfahren, in der eine Anzahl sonstiger Bestimmungsmöglichkeiten zusammengefaßt werden sollen.

Im hier vorliegenden Anwendungsfall stößt man mit den beiden erstgenannten Gruppen auf prinzipielle Schwierigkeiten. So müßte z.B. bei den erregten Schwingungen das Walzenmaterial starr mit der Schwingungsquelle verbunden sein. Das Verbindungselement, das im

<sup>1)</sup> Wie eingangs formuliert, wird der stoßende Körper hierbei stets als inkompressibel angesehen.

Kontaktbereich mit dem Walzenmaterial dabei die Form und die Abmessungen des Druckelementes haben muß, wäre dazu fest mit der Walzenoberfläche zu koppeln. Ohne das Walzenmaterial zu verletzen, ist dies nur durch Kleben möglich (Bild 34). Die Kleberzwischenschicht verfälscht aber durch ihre eigenen Dämpfungseigenschaften sofort die Meßwerte. Es wäre natürlich eine externe Bestimmung der Klebereigenschaften möglich, indem anstelle der Druckwalze eine feste Wand verwendet wird. Diese Meßwerte müßten dann in der Gesamtversuchsauswertung rechnerisch berücksichtigt werden. Abgesehen von der schlechten Reproduzierbarkeit der Versuche (z.B. genaues Einhalten der Kleberschichtdicke) kompliziert sich so die Bestimmung der Dämpfungseigenschaften des Walzenmaterials derart, daß hier kein Gebrauch davon gemacht wird.

Auf die feste Verbindung von Walzenoberfläche und Verbindungselement kann bedingt verzichtet werden, wenn die Erregung unter definierter Vorspannung des Walzenmaterials - also Eindrücken des Verbindungselementes in das Walzenmaterial auch bei verschwindender Erregung - vorgenommen wird (Bild 34). Je nach Größe der Vorspannung muß dabei allerdings beachtet werden, daß ein exaktes Anliegen des Verbindungselementes am Walzenmaterial nicht immer garantiert ist. Dies gestaltet diese Art der Dämpfungsbestimmung unsicher.

#### 1.6.1.1.1. Harmonische Erregung

(a) Resonanzmethode  $\gamma \approx \frac{1}{V_{\max}}$  (43.2)

Ein auf die Materialprobe aufgesetztes Druckelement wird durch einen elektromagnetischen Schwingungserreger unter einer einstellbaren statischen Vorlast (Bild 34 b) und einem dynamischen Kraftanteil  $F_0 \cos \Omega t$  zu einer oszillierenden Bewegung  $q(t)$  angeregt. Es sind  $F_0$  und  $\Omega$  stetig regelbar. Die Dgl.

$$m \ddot{q} + c \cdot e^{j\gamma} \dot{q} = \tilde{F} = F_0 e^{j(\Omega t + \alpha)} \quad (43.1)$$

liefert den komplexen Amplitudenfrequenzgang  $\hat{q}$  in der Form

$$\hat{q}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right) = \frac{1}{\cos \gamma - \eta^2 + j \sin \gamma} \quad .$$

Für kleine  $\gamma$ -Werte verschwindet  $\operatorname{Re}\{\hat{q}\}$  bei  $\Omega = \omega_0$ . Damit gilt:

$$\operatorname{Im}\left\{\hat{q}\left(\frac{\Omega}{\omega_0} = 1\right)\right\} \equiv \left|\hat{q}\left(\frac{\Omega}{\omega_0} = 1\right)\right| := V_{\max}$$

Es ist  $V_{\max} = \frac{c q_0 (\Omega = \omega_0)}{F_0}$ . Die Steifigkeit  $c$  der Probe muß bekannt sein.  $F_0$  und  $q_0$  werden am Gerät eingestellt bzw. gemessen.

Die  $\gamma$ -Werte sind abhängig von der Eindringtiefe und damit auch von der statischen Vorlast.

(b) Ortskurvenbestimmung 
$$\gamma \approx \sqrt{\frac{F_0^2 - (cq_0 - m\Omega^2 q_0)^2}{(cq_0)^2}} \quad (44)$$

Wird  $q(t)$  als harmonische Größe in (43) eingeführt, läßt sich die Ortskurvendarstellung  $\xi_0(\Omega) = F_0 e^{j\alpha}$  nach Bild 35 angeben.

(c) Verwendung der Hystereseschleife

Wird die Hystereseschleife aufgezeichnet, besteht die Möglichkeit, durch Ausmessen bestimmter Strecken oder Ausplanimetrieren der Hysteresefläche den Dämpfungswert  $\gamma$  zu bestimmen.

(c 1) Ausmessen der Ellipsenhalbachsen  $a$  und  $b$  nach Glg. (6):

$$\gamma \approx ab/q_0 F_0 \text{ für } \gamma < 0,1$$

(c 2) Ausplanimetrieren der Fläche  $\Delta W$

$$\gamma = \arctan \frac{\Delta W}{2\pi W} \quad (\text{vergl. Glg. (15)})$$

Eine Hystereseschleife kann auch quasistatisch durch stufenförmige Be- und Entlastung der Probe aufgenommen werden. Diese Methode findet ihre Berechtigung, wenn entweder der Einfluß der Erregerfrequenz nicht interessiert oder vernachlässigt werden kann. Für Gummi ist dieses Verfahren nicht geeignet.

(c 3) Ausmessen von  $q_0$  und  $q^*$  (nach Bild 36)

Für  $F = 0$  liefert die Ellipsengleichung die Beziehung

$$\sin \gamma = q^*/q_0 \quad (45)$$

(c 4) Vollmechanisierte  $\gamma$ -Bestimmung /28/

Im VEB Gummikombinat Thüringen steht eine von Bayer-Leverkusen entwickelte Dämpfungsprüfmaschine (s. Bild 37) zur Verfügung, die ein direktes Ablesen des Verlustwinkels mit einer Genauigkeit von  $\pm 5\%$  bei  $5^\circ$  gestattet. Die Messungen wurden bei  $20^\circ \text{C}$  vorgenommen. Der stetig einstellbaren statischen Vorlast wird eine sinusförmige Wechsellast mit 16,6 Hz und regelbarer Amplitude überlagert /vergl. (a)/. Zur Halterung des Walzengummis und des Druckelementes wurden geeignete Anpassungsstücke angefertigt. Eine an die Maschine gekoppelte Rechenanlage nimmt die notwendigen Korrekturen der Meßwerte vor. Die Dämpfungsschleife ist auf einem Bildschirm ständig beobachtbar. Wie bei allen anderen Versuchen waren auch hier Form und Größe des Druckelementes sowie die Anzahl der Papierlagen vari-



ierbar. Es muß allerdings auch hier darauf verwiesen werden, daß die entstehende Hystereseschleife nicht exakt ist, da das Druckelement und die zu untersuchende Probe (Walzengummi mit Papierlagen) nicht fest miteinander verbunden sein können.

(d) Thermische Methode /24/

Durch zyklische Deformation tritt in der Probe eine Temperaturerhöhung ein, die dem mechanischen Energieverlust  $\Delta W$  entspricht. In einem Kalorimeter kann die erhöhte Temperatur gemessen werden. Es ist darauf zu achten, daß die Wärme ständig abgeführt wird (strömendes Wasser), denn die Temperaturerhöhung führt selbst wieder zu Änderungen des Dämpfungsverhaltens. Es gilt:

$$\Delta W = \frac{\Delta T \cdot m_w}{T^* \cdot \Omega}$$

$\Delta T$ : gemessene Temperaturerhöhung

$m_w$ : Wassermasse

$T^*$ : Versuchsdauer

Wenn der Eigenenergieverbrauch des Schwingungserregers pro Zyklus bekannt ist, kann der Energiemehrverbrauch  $\nu \cdot \Delta W$  zur Aufrechterhaltung der konstanten Amplitude  $q_0$  über  $\nu$  Perioden ( $\nu$  genügend groß wählen) auch direkt gemessen werden. Damit ist  $\Delta W$  bekannt und bei bekannter Federkennlinie auch  $W$ .

#### 1.6.1.1.2. Freie Schwingungen

Unter Punkt 3.3. wird am Beispiel von Piezo-Biegeschwingern beschrieben, wie aus der Amplitudenfolge der freien Schwingung der Parameter  $\gamma$  ermittelt wird. Für den hier vorliegenden Anwendungsfall des Stoßes des Druckelementes auf eine mit Papierlagen beschichtete Druckwalze wurde ebenfalls ein Versuchsstand aufgebaut (Bild 38.1), der gleichzeitig zur Bestimmung der Newtonschen Stoßzahl  $\varepsilon$  verwendet wurde (siehe unter 1.6.1.1.3.). Es wird das fotoelektrische Prinzip der Wegmessung mit dem bereits in Bild 4 gezeigten Gehäuse der Meßeinrichtung verwendet. An verschiedenen großen Fallmassen wird eine Blende befestigt. Fehlerhafte Messungen (Reiben der Fallmassen in ihrer Führung) machen sich durch starkes Verrauschen des Meßsignals bemerkbar.

Es ist

$$\begin{aligned} \psi &:= \frac{\Delta W}{W} \approx \frac{dW}{W} = d(\ln|W|) \approx \Delta \ln|W| \\ &= \ln \left| \frac{W_\nu}{W_{\nu+2}} \right| := \sigma_w = 4 \sigma. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\gamma \approx \frac{2\delta}{\pi} = \frac{\delta^*}{\pi} \quad (46)$$

Es kann  $\delta$  aus den Amplitudenwerten  $q_v$  (wobei die Amplituden maximal nur bis  $v = 3$  auszuwerten waren) oder nach Glg. (63) unter Punkt 3.3. ermittelt werden. Beide Methoden kamen vergleichend zur Anwendung.

Die Ergebnisse zeigten teilweise starke Streuungen der Werte, was auf zu grobe Meßbedingungen schließen läßt.

#### 1.6.1.1.3. Sonstige Bestimmungsmöglichkeiten

(a) Beziehung zwischen  $\gamma$  und der Newtonschen Stoßzahl  $\epsilon$

Zur Ermittlung von  $\epsilon$  wurden drei verschiedene Methoden herangezogen:

$$(a\ 1) \quad \epsilon := - \frac{\dot{x}_{00}}{x_0} \quad \text{nach Bild 9}$$

$$(a\ 2) \quad \epsilon := \sqrt{\frac{h}{H}} \quad \text{nach Bild 38.2}$$

$$(a\ 3) \quad \epsilon := \sqrt{\frac{W_0 - \Delta W_S}{W_0}} \quad \text{durch Ausplanimetrieren der Hystereseschleife } -\ddot{x}(x) \text{ aus Versuch nach Bild 9}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{\Delta W_S}{W_0}}$$

Bei der Bestimmung nach  $\epsilon := \sqrt{h/H}$  garantiert die Verwendung einer Glasröhre als Führung eines frei fallenden Druckelementes, daß die durch die Druckelementführung bedingten und das Meßergebnis verfälschenden Reibungsverluste klein bleiben. Der Innendurchmesser der Glasröhre muß so bemessen sein, daß ein Aufschlagen des Druckelementes in schiefer Stellung nicht möglich ist. Der Vorgang wird mit dauernd geöffneter Blende fotografiert. Die Negative werden unter entsprechender Vergrößerung ausgewertet. Zur Verdeutlichung der Bestimmung nach

$$\epsilon := \sqrt{\frac{W_0 - \Delta W_S}{W_0}}$$

zeigt Bild 39 die Energieverhältnisse beim Stoßvorgang. Das Experiment bestätigt die unter 1.5.1.3. getroffene theoretische Aussage, daß der dissipative, nichtlineare und zwangserregte Verband nach Glg. (28) eine periodische Lösung besitzt. Die Hysterese-funktion

hat die Form einer Ellipse. Es ist stets möglich, die Parameter der Zwangserregung bzw. die Auftreffgeschwindigkeit so zu wählen, daß  $W = W_0$  erfüllt ist. Bild 40 zeigt den Vergleich mit der Hysterese-funktion beim Stoß. Es soll also

$$W_0 \stackrel{!}{=} W = \int_0^{x_n} F_R(x) dx = \Delta W_1 + \int_0^{x_E} F_R(x) dx = \Delta W_S + W_{00}$$

erfüllt sein. Es wird  $\frac{\Delta W}{\Delta W_S} = \vartheta$  gesetzt. Mit  $W_0 = W$  folgt über  $\Delta W_S = W_0(1 - \varepsilon^2)$  und Glg. (15) die Beziehung (47):

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2\pi \tan \gamma}{\vartheta}} \quad \text{oder} \quad \gamma = \arctan \left( \frac{\vartheta}{2\pi} (1 - \varepsilon^2) \right) \quad (47)$$

Die Betrachtung  $\varepsilon \rightarrow 1$  liefert folgerichtig  $\gamma \rightarrow 0$ .

Es kann  $\gamma$  einen Betrag von  $\frac{\pi}{2}$  nicht überschreiten. In den Diagrammen 8.3 und 8.4 wurde  $\vartheta = 3$  angenommen. Dies ist ein Überschlagswert, der sich aus dem Vergleich der  $\Delta W_S$ -Werte mit den nach Versuch (c 4) unter Punkt 1.6.1.1.1. ermittelten  $\Delta W$ -Werten ergeben hat ( $W_0 \stackrel{!}{=} W$ ). Dieser  $\vartheta$ -Wert muß für eine Betrachtung zur Fehlerfortpflanzung in Glg. (47) mit einer Ungenauigkeit von etwa  $\pm 25\%$  angesetzt werden.

$$(b) \quad \gamma \approx \frac{\Delta t \cdot \pi}{2 t_{xE}} = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{t_{\ddot{x}E}}{t_{xE}} \right) \quad (48.1)$$

Unter Punkt 1.5.1.1. wurde nachgewiesen, daß  $\gamma$  bei der freien Schwingung in direktem Zusammenhang steht mit der Phasenverschiebung zwischen Weg und Beschleunigung. Die Dgl. (26) zeigt, daß diese Phasenverschiebung zwischen den Werten 0 bei  $t = t_0$  und bei  $t = t_1$  ( $t_1$  bedeutet den Zeitpunkt, zu dem  $x$  und  $-\ddot{x}$  wieder zu Null werden würden, wären die stoßenden Körper ab  $t_0$  fest miteinander verbunden (z.B. Bild 28.1)) zunächst zu- und dann wieder abnimmt. Da die Phasenverschiebung mit der Dämpfung und diese wiederum mit dem bewegten Materialvolumen, also mit der Eindringung  $x$ , wächst, liegt es nahe, daß sie ihren Maximalwert bei  $x = x_E$  erreicht. Die Zeitpunkte  $t_{xE}$  und  $t_{\ddot{x}E}$  der Extremwerte der Funktionen  $x(t)$  und  $-\ddot{x}(t)$  sind also geeignet zur Messung des repräsentativen Wertes der Phasenverschiebung (siehe Bild 13.3):

$$\Delta t = t_{xE} - t_{\ddot{x}E}$$

Da der Zeitpunkt  $t_1$  nicht gemessen werden kann, wird die Periodendauer  $T$  näherungsweise mit  $T \approx 4 (t_{xE} - t_0)$  angesetzt. Damit er-



gibt sich Glg. (48.1), wenn  $t_0 = 0$  gesetzt wird und

$$\gamma = \omega \cdot \Delta t. \quad (48.2)$$

Bei einer statistischen Sicherheit von 95 % und sechs gültigen Messungen der Werte  $t_{xE}$  und  $t_{\ddot{x}E}$  ergibt sich durch Fehlerfortpflanzung bei einer angenommenen Fehlerbehaftung der Werte  $t_{xE}$  und  $t_{\ddot{x}E}$  von 10 % für die Varianz  $\bar{s}_\gamma^2$  der Näherung (48.1) der Wert

$$\bar{s}_\gamma^2 \approx 0,045 \frac{t_{\ddot{x}E}^2}{t_{xE}^2}.$$

Ausgehend von den Glgn. (14) mit  $c_k \equiv c$  können die Zeitpunkte  $t_{xE}$  und  $t_{\ddot{x}E}$  berechnet werden:

$$t_{xE} = \frac{\arctan\left(\frac{v}{\mu}\right) - \xi}{\omega_0 v}$$

$$t_{\ddot{x}E} = \frac{\arctan\left(\frac{v - \mu \gamma}{v \gamma + \mu}\right) - \xi}{\omega_0 v}$$

Daraus folgt:

$$\Delta t = \frac{1}{\omega_0 v} \left( \arctan\left(\frac{v}{\mu}\right) - \arctan\left(\frac{v - \mu \gamma}{v \gamma + \mu}\right) \right) \quad (49)$$

Für  $\gamma \rightarrow 0$  verschwindet auch  $\Delta t$ . Da  $\Delta t$  nicht größer als  $t_{xE}$  werden kann, folgt auch aus (48.1) der Grenzwert  $\frac{\pi}{2}$  für  $\gamma$ . Ergänzend sei bemerkt, daß der Vergleich der Glgn. (48.1) und (48.2) mit der Aussage  $\omega \approx 1,57/t_{xE}$  keinen Widerspruch ergibt. Mit  $m$  wächst  $t_{xE}$  (s. Bild 13.1) und damit sinkt  $\omega$  (entsprechend seiner Definition).

#### 1.6.1.2. Ergebnisse

In den Diagrammen 8 werden die gewonnenen Ergebnisse dargestellt und gleichzeitig mit in der Literatur genannten Werten verglichen (s. D 8.4). Letztere streuen wegen der unterschiedlichsten Meßbedingungen stark ( $0 < \gamma \leq 0,41$ ). Sämtliche eigenen Messungen wurden bei Zimmertemperatur vorgenommen. Teilweise große Streuungen der Meßwerte (gerade bei den Versuchen mit Stoßbelastung) haben ihre Ursache wahrscheinlich in der Materialinhomogenität. In die Diagramme eingetragen wurden jeweils die gemittelten Versuchswerte. Charakteristisch ist das in allen Fällen zu erkennende Ansteigen der  $\gamma$ -Werte mit der Eindringung  $x_E$  bzw.  $x_n$ .

Während im Versuch nach Bild 38.2 kleine Fallmassen in der Größenordnung von etwa 2 g verwendet wurden, kamen im Versuch nach

Bild 38.1 bzw. Glg. (46) vergleichsweise große Fallmassen von 127 g, 248 g und 360 g zur Anwendung. Die Folge ist, daß die Stoßmassen Schwingungen in verschiedenen Tiefen des Materials des gestoßenen Körpers ausführen. Die Aufschlaggeschwindigkeiten schwanken zwischen den Werten 0,2 m/s und 0,3 m/s. Die geometrische Form und die Abmessungen des Fallkörpers im Kontaktbereich mit dem gestoßenen Körper blieben selbstverständlich bei allen Versuchen konstant.

Für die Anwendung von Glg. (47) macht sich die Bestimmung der Verhältniszahl  $\varphi = \Delta W / \Delta W_S$  erforderlich. Für die hier interessierenden Eindringtiefen bis 1 mm bei  $\Lambda = 0$  schwankte  $\varphi$  in dem Bereich  $2 < \varphi < 4$ . Die Werte wurden durch Ausplanimetrieren der  $\Delta W$ - und  $\Delta W_S$ -Flächen aus den Versuchen nach den Bildern 9b und 37 ermittelt.

Die Versuche nach Bild 37 lassen deutlich das Ansteigen der  $\gamma$ -Werte mit wachsendem  $d$  bzw.  $\Lambda$  erkennen. Es wird auch erkennbar, daß die Verwendung eines Farbbandes die  $\gamma$ -Werte leicht erhöht. Zwischen Farbbändern aus Seide bzw. Baumwolle kann kein signifikanter Unterschied festgestellt werden. Die Verwendung einer Karteikarte bedingt  $\gamma$ -Werte, die sich etwa auch bei  $\Lambda = 4$  einstellen.

Beim Versuch nach Glg. (43.2) wurde mit statischen Vorlasten von 0,785 N, 0,981 N, 1,765 N, 2,746 N, 3,923 N und 4,903 N gearbeitet bei einem Nadeldurchmesser von 0,3 mm.  $F_0$  durchlief die Werte 0,235 N, 0,471 N, 0,706 N, 0,951 N und 1,098 N. Bei Glg. (43.2) wird im Gegensatz zu Glg. (28) von einer linearen Federcharakteristik ausgegangen. Für eine grobe  $\gamma$ -Bestimmung ist dies unter Berücksichtigung der sonstigen Fehlereinflüsse durchaus vertretbar. Es wurde  $c = 9,80665 \text{ kN/m}$  gesetzt (vergl. unter 1.6.2.).

Beim Versuch (a 2) nach Abschnitt 1.6.1.1.3. wurden die Fallhöhen  $H$  und damit die Eindringtiefen  $x_E$  nicht variiert. Die so ermittelten  $\varepsilon$ -Werte können daher in D 8.3 nicht als Kurve eingetragen werden. Die Werte für die Gummiwalze sind durch  $\times$  markiert. Jeder  $\varepsilon$ -Wert stellt den Mittelwert aus zehn Messungen dar. Die Aufschlagstelle wurde stets gewechselt. Es war darauf zu achten, daß die einzelnen Papierschichten - ebenso wie bei allen anderen Versuchen - straff an der Gummiwalze anliegen. Tabelle 6 gibt einen Überblick über die Meßergebnisse. Trotz der geringen Masse des stählernen Fallgewichtes von etwa 2 g werden bei  $H = 500 \text{ mm}$  große Aufschlagenergien erreicht (etwa 9,8 mJ). Damit wurde zum Beispiel auf der Lage  $\Lambda = 5$  eine gute Schwärzung erzielt. Die Werte  $x_E$  liegen entsprechend D 2.5 im wesentlichen um 1,0 mm. Erkennbar ist ebenfalls wieder

die  $\varepsilon$ -Abnahme (bzw.  $\gamma$ -Zunahme) mit wachsenden  $\Lambda$ -Werten. Der Einfluß des Farbbandes ist gering. Die deutliche Änderung der Stoßverhältnisse bei Verwendung einer Aluminiumwalze ist leicht zu erklären. Während bei der Gummiwalze bei  $\Lambda > 0$  der Gummi spürbar mit eingedrückt wird und teilelastisch zurückwirkt, werden hier im wesentlichen die Papierschichten über der harten Aluminiumwalze zusammengedrückt und damit der Großteil der Energie  $W_0$  verbraucht. Drucktechnisch bedeutet das eine bessere Schwärzung der Papierlagen, aber ein bedeutend langsamer zurückkehrendes Druckelement.

Auffallend ist bei den Versuchen (a 1) und (a 3) die gute Übereinstimmung. Das Aufzeichnen der Hysterese Funktion  $-m\ddot{x}(x)$  und deren Ausplanimetrieren sowie die Messung der Werte  $\dot{x}_0$  und  $\dot{x}_{00}$  waren also recht zuverlässig. Für (a 1) erfolgte die Berechnung für die beiden Begrenzungskurven des Wertebereiches in D 6.1 unter Beachtung von D 2.5. Die Kurven 1 und 11 stellen also ebenfalls Wertebereichsgrenzen dar für  $\Lambda = 0$  und  $\Lambda = 5$ . Für große Werte  $x_E$  decken sich diese Ergebnisse mit denen in D 8.1. Für kleine Werte  $x_E$  wird - wie leicht einzusehen ist - die Dämpfungsermittlung immer ungenauer. Die Kurven  $\gamma(x_E)$  schmiegen sich für große Werte  $x_E$  an die Gerade  $\varepsilon = 0$  an (vergl. Aussagen unter 1.4.3.2. bzw. D 6.1 und in /67/).

Im Diagramm 8.3 tritt sehr deutlich hervor, welchen großen Einfluß die Versuchsbedingungen auf die  $\varepsilon$ -Bestimmung haben. Während bei den Versuchen (a 1) und (a 3) die gleichen Bedingungen vorlagen (große Massen, horizontale Bewegungsrichtung der Massen), wird bei (a 2) davon abweichend mit wesentlich kleineren Massen und mit vertikaler Bewegung gearbeitet. Die Folge ist, daß bei (a 2), begründet durch die Erdverzögerung während der Restitution und Klebe- sowie Verhakungseffekte zwischen dem Druckelement und dem gestoßenen Material, die sich bei kleinen Massen natürlich wesentlich stärker verzögernd auswirken als bei großen Massen, die  $\varepsilon$ -Werte bedeutend niedriger ausfallen als bei den Versuchen (a 1) und (a 3). Besonders klar ist das zu erkennen bei  $\Lambda = 0$ , während sich für  $\Lambda > 0$  die Auswirkungen ohnehin verwischen.

In D 8.4 erfolgt die Zusammenfassung der  $\gamma$ -Werte. Es sind die starken Streuungen zwischen den Diagrammen 8.1 bis 8.3 zu erkennen. Trotzdem ist es möglich, ein Gebiet, in dem sich die Meßpunkte ansammeln, anzugeben. Die Meßpunkte der Kurven mit den Nummern 7 bis 10 liegen im wesentlichen innerhalb der eingezeichneten Bewegungslinien für  $\Lambda = 0$  und  $\Lambda = 5$ . Auf Grund der teilweise starken Streuungen der Meßwerte ist es schwierig, solche Begrenzungslinien zu ziehen, besonders im Bereich großer  $\Lambda$ -Werte. Vereinfachend wird daher  $F_D(x, \dot{x})$  aus Glg. (22) als linear in  $x$  angesehen:



$F_D(x) = f(x) \cdot h(\dot{x}) = a_1 |x| \cdot h(\dot{x})$ . Mit  $b_2 = 0$  (s. 1.5.1.3.) wird  $F_D(x) = a_1 b_1 |x| \dot{x} = \bar{k}(x) \dot{x} = \frac{k^*(x)}{\omega} \cdot \dot{x}$ . Für kleine  $\gamma$  gilt Glg. (19):  $k^*(x) \approx c \gamma(x)$ . Hier wird ebenso wie bei Glg. (43.2) eine lineare Federcharakteristik zugrunde gelegt. Eine Beziehung zwischen  $f(x)$  in  $F_D(x)$  und  $\gamma(x)$  für eine parabolische Federkennlinie wurde nicht gefunden. Vereinfachend wird angenommen:  $c \approx 9,81 \text{ kN/m}$  bei  $0 \leq \Lambda \leq 3$  und  $d = 0,3 \text{ mm}$ . Es ist weiter

$$F_D(x) \approx \frac{c}{\omega} \gamma(x) \dot{x} \approx \frac{c}{\omega_0} \gamma(x) \dot{x} \quad (50)$$

Aus D 8.5 können die Funktionen  $\gamma(x)$  für verschiedene  $\Lambda$ -Werte entnommen werden:

$$\gamma(x) \Big|_{\Lambda=i} = \bar{\alpha}_i x, \text{ mit } 0 \leq i \leq 5$$

Damit folgt  $a_1 b_1 = \frac{c}{\omega} \bar{\alpha}_i$ .

### 1.6.2. Steifigkeit

Im Vergleich zum Meßproblem Werkstoffdämpfung erfordert das Ermitteln der Steifigkeit weit weniger theoretische Vorbereitung. Natürlich gibt es auch hier wieder verschiedene Möglichkeiten der Gewinnung der Kennlinien. Dabei ist lediglich das Kriechverhalten des belasteten Gummimaterials zu beachten. Da es recht aufwendig ist, die Eindringung eines Stempels mit entsprechend großer Masse in die Gummivalze nach einer sehr kurzen, der Stoßzeit entsprechenden Dauer zu messen, liegt es nahe, die Eindringungen mit den zugehörigen Kräften direkt aus den Stoßaufnahmen nach Versuch Bild 9 zu entnehmen. Da bei  $x = x_E$  die Geschwindigkeit und damit die Dämpfungskraft verschwinden, ergibt die Verbindung aller Punkte  $x = x_E$  der Hysteresefunktionen für verschiedene Werte  $\dot{x}_0$ , aber sonst gleichen Bedingungen, die Federkennlinie  $F_R(x)$  (Bild 41). Die Funktionen  $F_R(x)$  können damit relativ einfach für viele Parameterkombinationen ermittelt werden. Wie oben bereits erwähnt, wurde jede Parametereinstellung mehrfach wiederholt. Die in Diagramm 8.6 gezeichneten Funktionen  $F_R(x)$  für  $d = 0,3 \text{ mm}$ ,  $0 \leq \Lambda \leq 5$  und  $v_r = 0 \text{ ms}^{-1}$  stellen daher die Verbindungen gemittelter Werte dar. Die Streuungen der Meßwerte sind teilweise recht stark und nehmen generell mit  $\Lambda$  zu. In der Nähe des Nullpunktes lieferten die Experimente keine reproduzierbaren Werte. Es zeigt sich, daß ausnahmslos quadratische Parabeln als Näherungsfunktionen verwendet werden können (in Glg. (26.3) ist also  $n = 2$  zu setzen).

Aus D 8.7 ist ersichtlich, in welchem Maße die Größe der elastischen Gegenkraft vom Zeitpunkt der Messung abhängt. Zur Aufnahme dieser Funktionen konnte im wesentlichen der Versuchsaufbau nach Bild 38 angewendet werden, wobei diesmal das Walzenmaterial statisch belastet wurde. Die lineare Näherung  $F_R(x) \approx cx$  mit  $c \approx 9,81 \text{ kN/m}$  ist in D 8.7 zur Verdeutlichung eingetragen. Die  $x_{\text{stat}}$ -Werte zu den markierten Zeitpunkten werden auf die Horizontalen der entsprechenden Belastung gelotet. Die Verbindung dieser Punkte liefert die Funktionen  $F_R(x)$  für verschiedene Zeitpunkte der Messung.  $F_R(x)$  für 1 s und 200 s begrenzen das schraffierte Gebiet, in dem die gemessenen Funktionen  $F_R(x)$  für 3 s, 10 s, 30 s, 50 s, 100 s und 150 s verlaufen. Belastungen kleiner als 0,98 N lieferten keine reproduzierbaren Meßergebnisse. In D 8.8 sind gemessene Funktionen  $F_R(x)$  dargestellt, die aus /68/ übernommen wurden.  $F_R(x)$  für  $\Lambda = 0$  liegt hier außerhalb des in D 8.7 schraffierten Bereiches. Es ist allerdings auch verwunderlich, daß die Funktion  $F_R(x)$  für  $\Lambda = 0$  im hier betrachteten Belastungsbereich stets größere Werte  $x_{\text{stat}}$  besitzt als  $F_R(x)$  für  $\Lambda = 1;2$ . Wäre hier dieses kaum erklär- bare Ergebnis nicht zu verzeichnen, würde auch etwa Übereinstimmung mit D 8.7 herrschen. Gegenüber D 8.6 sind teilweise doch erhebliche Abweichungen feststellbar.

Es gibt noch eine Reihe anderer Verfahren, die Funktionen  $F_R(x)$  aus verschiedenen untereinander zusammenhängenden Meßwerten für unterschiedliche Parameterkombinationen zu bestimmen. Sie können als zusätzliche Kontrollmöglichkeiten angesehen werden. Abgesehen von vereinzelt Nachrechnungen fanden sie hier aber keine Anwendung.

#### 1.7. Vergleich der theoretischen mit den experimentellen Ergebnissen

Die Lösungen (32.2) und (36) sollen mit dem Experiment verglichen werden (D 9.2). Dazu wird willkürlich die Parameterkombination  $\Lambda = v_r = 0$ ,  $d = 0,3 \text{ mm}$  und  $m = 125 \text{ g}$  ausgewählt. Für die gleichen Parameter zeigt D 9.1 zunächst die Unterschiede zwischen beiden Lösungen. Es erweist sich die Näherung (36) als die bessere. Als entscheidendes Kriterium muß dabei die Funktion  $x_E(t_{xE})$  herangezogen werden, denn sowohl  $x_E$  als auch  $t_{xE}$  sind drucktechnisch von Bedeutung. D 9.2 zeigt, daß die Funktionen  $x_E(t_{xE})$  im Vergleich Berechnung/Experiment keine relevanten Abweichungen aufweisen. Nach dem Überschreiten des Zeitpunktes  $t_{xE}$  differieren die gemessenen Funktionen mit den berechneten etwas mehr als während der Kompressionsphase. Die Ursachen liegen darin, daß das mathematische Modell die

realen Bedingungen während der Restitutionsphase nicht genau erfaßt (z.B. Kleben und/oder Verhaken des Stoßelementes in Papier und Walzengummi). Die tatsächlichen Beträge der Rückprallgeschwindigkeiten  $\dot{x}_{00}$  werden stets kleiner sein als die berechneten. Eine  $\epsilon$ -Bestimmung ist auf diesem theoretischen Wege also nur bedingt möglich. Die Zeiten  $t_{ab}$  müssen ohnehin dem Experiment entnommen werden. Bedeutungsvoll für die Anwendbarkeit der Glg. (36) ist ebenfalls die Güte der Einordnung der berechneten Funktionen  $x_E(\dot{x}_0)$  und  $t_{xE}(\dot{x}_0)$  in die gemessenen Kurvenscharen. Dabei ist festzustellen, daß  $x_E(\dot{x}_0)$  genau in den gemessenen Bereich fällt (D 2.5). Ebenfalls gute Übereinstimmung herrscht bei  $t_{xE}(\dot{x}_0)$  (vergl. D 4.4).

Ein Vergleich Theorie/Experiment für die Funktion  $\ddot{x}(t)$  und damit für die Abhängigkeiten  $t_{ab}(m, \dot{x}_0)$  und - wie schon erwähnt -  $\dot{x}_{00}(m, \dot{x}_0)$  sowie  $\ddot{x}_E$ ,  $t_{xE}(m, \dot{x}_0)$  ist wegen der Fehlerfortpflanzung beim Differentiationsprozeß der Näherungslösung (36) zumindest für die direkte Lösungsfindung durch zweimalige Differentiation von  $x(t)$  nicht sinnvoll. Nachrechnungen ergaben, daß im Falle des Einsetzens der durch Differentiation von (36) gewonnenen Werte  $\dot{x}(t)$  in die Dgl. (26) die so berechneten von den experimentell gefundenen Werten  $\ddot{x}$  durchschnittlich etwa 20 % abweichend waren. Auf diese Weise ist man in der Lage, wenigstens einige markante Werte  $\ddot{x}$  annähernd zu errechnen.

Aus den Diagrammen 2 bis 9.2 ist also ersichtlich, daß die Dgl. (26.3) mit  $a_2 = m_0 = 0$  und  $n = 2$  zur theoretischen Erfassung des Abdruckvorganges (gemeint ist schlagende mechanische Kontrasterzeugung) geeignet ist. Die Bilder 42 bis 44 zeigen die Nachbildung dieser Dgl. auf der Analogrechenanlage:  $\ddot{\eta} = -\alpha_1 \dot{\eta}/\eta - \alpha_6 |\dot{\eta}/\eta|$ . Die Diagramme 9.3 zeigen dazu als Ergebnis und in Ergänzung zu D 5.2.2 zusammenfassend qualitativ die Abhängigkeit der Kennwerte  $t_{xE}$ ,  $t_{\ddot{x}E}$ ,  $\Delta t$ ,  $t_{ab}$ ,  $x_E$ ,  $\ddot{x}_E$ ,  $\Delta W_s$  von den Größen Auftreffgeschwindigkeit, Dämpfungsfaktor und Steifigkeit. Der Vergleich mit den Diagrammen 2.1, 2.5 bis 2.7, 3, 4, 6 und 5.10 bis 5.12 bringt qualitative Übereinstimmung bei allen Funktionen. Auch wenn die quantitative Auswertung teilweise relativ starke Streuungen der Meßwerte zeigt, ist diese qualitative Übereinstimmung bei allen Kenngrößen Nachweis genug für die prinzipielle Anwendbarkeit der Dgln. (26) zur Erfassung des Abdruckvorgangs und generell des geraden zentrischen Stoßes eines inkompressiblen Körpers gegen eine feste teilelastische Wand.



## 2. Zu den Prinzipien der mechanischen Kontrasterzeugung

Wie in der Einführung und der Problemanalyse erwähnt, hängen die Anforderungen an ein Druckwerk von dessen Anwendungsgebiet ab. Je nach geforderter Kopienzahl wird also z.B. die notwendige Flächenpressung (bzw. Aufschlagenergie oder Eindringung) verschiedene Werte annehmen.

Für die Konzipierung einfacher und robust gestalteter Druckwerke niedriger Zeichenfrequenz ist dies die wichtigste Vorgabe. Es gibt hier auch keine neuen Probleme zu verzeichnen. Bei Schnelldrucksystemen tritt die Frage der Kopienzahl zwangsläufig in den Hintergrund. Hier dominieren die Problemkreise Druckzeiten, Lesbarkeit, Zuverlässigkeit des Druckwerks und Geräuschpegel. Diese Qualitätskennwerte eines Schnelldruckes hängen bei schlagender Kontrasterzeugung wechselseitig voneinander ab, und es muß stets ein Kompromiß zwischen diesen vier Kennwerten gefunden werden. Es drängt sich daher die Frage nach solchen Druckwerken mechanischer Kontrasterzeugung auf, bei denen man von einem oder mehreren der genannten vier Kennwerte unabhängig wird. In Ergänzung zu den Arten der schlagenden Kontrasterzeugung nach Tabelle 1 ist daher das Problem der drückenden Kontrasterzeugung zu untersuchen. Die einzelnen Schritte bis zu einer solchen Lösungsvariante lassen sich unter dem Aspekt einer möglichst großen Anzahl Zeichen pro Zeiteinheit wie folgt charakterisieren:

1. Das Druckelement muß aus der Ruhestellung heraus auf die notwendige Aufschlaggeschwindigkeit beschleunigt werden. Dies ist die Gruppe mit dem geringsten Leistungsvermögen, zumal die Zeit zum Rücktransport des Druckelementes in die erneute Ruhestellung mitgerechnet werden muß.<sup>1)</sup> Der Rücktransport ist erst dann bedeutungslos, wenn für das gleiche zu drückende Zeichenelement mindestens so viele Druckelemente zur Verfügung stehen, um durch deren aufeinanderfolgenden Einsatz die Rücktransportzeit des ersten Druckelementes zu überbrücken. Dies bedingt jedoch einen komplizierten Aufbau des Druckwerkes.

Minimale Bewegungsgesamtdauer = Vorlauf plus Kontaktzeit (je nach gebundener oder freier Druckart (s. Tabelle 1)).

---

<sup>1)</sup> Typisches Beispiel sind die elektromagnetischen Mosaikdruckwerke. In /76/ wird untersucht, welche Möglichkeiten bestehen, die Druckfrequenzen eines solchen elektromagnetischen Antriebes zu erhöhen.

2. In die zweite Kategorie sind solche Prinzipien einzuordnen, bei denen das Druckelement im Moment seiner Auswahl bereits die erforderliche kinetische Energie besitzt. Die Druckelemente sind also stets in Bewegung und müssen nur zum Abdruck freigegeben werden. Prinzipiell kann damit die Zeit zwischen Abdruckvorgängen zu Null gemacht werden. Hier steigen aber der technische Aufwand und die Anzahl der Druckelemente noch mehr an.  
Minimale Bewegungsgesamtdauer = Kontaktzeit (je nach gebundener oder freier Druckart).
3. Wird der Übergang von schlagender zu drückender Kontrasterzeugung vollzogen, ist es prinzipiell möglich, die Abdruckgesamtdauer die Kontaktzeit nicht überschreiten zu lassen. Die Abdruckgesamtdauer wird bestimmt von der Auswahlgeschwindigkeit der Druckelemente. Kann diese Auswahlgeschwindigkeit durch entsprechend geschickt aufgebaute Auswahlvorrichtungen höher getrieben werden, dann steigt in entsprechendem Maße die Druckfrequenz. Die Kontaktzeit ist abhängig von der Übertragungsgeschwindigkeit des Farbstoffes vom Farbstoffträger auf den Aufzeichnungsträger und damit sowohl vom Druck zwischen beiden als auch von der Beschaffenheit des Farbstoffträgers. Die notwendige Kontaktzeit kann in der Praxis stets so klein gehalten werden, daß allein die Auswahlgeschwindigkeit bestimmend bleibt für die mögliche Druckfrequenz.

In /69/ sind mehrere Prinzipiellösungen für die dritte Gruppe angegeben. Bild 45 zeigt das Prinzip "Nadelwalze" in seiner einfachsten Form. Die überstehende Nadellänge wird mit  $a$  bezeichnet. Soll eine Drucknadel zum Abdruck gelangen, wird sie in der gezeichneten Stellung mit der überstehenden Nadellänge  $a$  arretiert. Soll kein Abdruck erfolgen, wird sie bis auf das Maß  $a = 0$  durch eine entsprechende Vorrichtung eingezogen. Je nach gewünschtem Kontrast und Anzahl Nutzen wird die Achse (Welle) der Nadelwalze um einen geeigneten Weg  $b$  an das Gegenlager angestellt. Die Walze rollt dann auf diesem eingestellten Niveau ab. Die Verwischung  $c$  errechnet sich nach

$$c = R' [(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1]$$

mit  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  als Lösungen von

$$\varphi_0 = \arccos(1 - b/R').$$

Auch die Realisierung von verlängerten oder verkürzten Zykloiden ist möglich. Der Nadelwalzenradius  $R$  bestimmt sich zu

$$R = \frac{a\xi}{\eta - \xi}.$$

Bild 46 zeigt die Einsparung einer voll ausgebildeten Nadelwalze durch Verwendung eines Nadelbandes.

Zentrales Problem beim Aufbau eines Mosaikdruckwerkes nach dem Nadelwalzen- oder Nadelbandprinzip ist das Finden einer geeigneten Selektiervorrichtung, die ein möglichst schnelles und zuverlässiges Anstellen der Nadeln um den Betrag  $a$  garantiert. Die Vorteile einer solchen drückenden Kontrasterzeugung sind folgende:

- die Schreibgeschwindigkeit kann auch während des Drucks stetig geregelt werden, wobei ihre obere Grenze lediglich von der Schnelligkeit der Selektiervorrichtung für die Druckelemente abhängt
- die Druckelemente bewegen sich in Druckrichtung nur etwa 1 mm, bei genügend großer Anzahl können sie sehr langsam angestellt werden (Kräfte, Verschleiß)
- die Druckkraft kann auch während des Drucks über die Größe  $c$  (s. Bild 45) geändert werden (Kontrasteinstellung, Schriftqualität)
- auf Grund der fehlenden stoßförmigen Belastung werden die Druckelemente weniger beansprucht
- Verwischung der Druckzeichen und Querbeltung der Drucknadeln hängt nicht mehr von der Relativgeschwindigkeit  $v_r$  zwischen Aufzeichnungsträger (Papier) und Druckelement ab, sondern wird nur noch vom konstruktiven Aufbau der Nadelwalze bestimmt
- der Abdruckvorgang geschieht völlig geräuschlos
- die Nadelenden können relativ einfach ständig eingefärbt werden (Unabhängigkeit von Farbband)
- stets gleichbleibende Abdruckgüte (auf Grund der möglichen großen Anpreßkraft unabhängig von eventuellen Papierinhomogenitäten)
- Abdruckenergie  $W_0$  muß nicht aufgebracht werden
- zusätzlicher Aufwand für die Forderung  $v_r = 0$  ist nicht notwendig

Nachteile dieser Form der mechanischen Kontrasterzeugung sind:

- viele Druckelemente (z.B. Nadeln)
- die Auswahl der Druckelemente ist ein schwieriges technisches Problem
- geringe Verwischung ist unumgänglich

Zwei wesentliche Forderungen, die ein solches Druckwerk erfüllen muß, sind die sichere Auswahl der Druckelemente und eine möglichst einfache Herstellung der Nadelwalze (Nadelband). Anstelle von Nadeln können auch andere Druckelemente verwendet werden, und schließlich kann man vom Punktraster sogar zu Linienzügen übergehen.

Hinweise dazu sowie eine Auswahl von Selektionsmöglichkeiten für die Druckelemente jeder der o. g. drei Kategorien von Druckwerken mechanischer Kontrasterzeugung finden sich in /69/. So ist es z.B.



möglich, Striktionseffekte für die Selektion der Druckelemente auszunutzen. In /70/ findet sich eine Zusammenstellung von Striktions-effekten. Diese werden dort definiert als "Vorgänge, bei denen die für die Änderung der Geometrie des betrachteten Körpers benötigte Energie Feldern entzogen wird". Als prinzipiell nutzbare Felder werden elektrische Felder sowie Magnet-, Temperatur- und Gravitationsfelder angesehen. Man kann zusätzlich die Begriffe gebundene und freie Striktion einführen, je nachdem ob zum Eintreten einer Striktion eine feste Bindung des Striktionskörpers an das Gestell notwendig ist oder nicht. Bezieht man Grenzflächeneffekte in die Betrachtung ein und ersetzt den Begriff Striktion nun durch die allgemeinere Vokabel Verformung, können folgende Verformungseffekte unterschieden werden:

1. freie Verformung durch Polarisierung
2. gebundene Verformung durch Polarisierung
3. gebundene Verformung durch Grenzflächenwirkung.

Beispiele dieser drei Arten für jedes der o. g. Felder finden sich in /70/. Durch solche Kombinationen der Begriffe ergibt sich die Möglichkeit, systematisch neue Wirkprinzipien zu finden. So folgt z.B. aus der Kombination der freien Verformung mit einem elektrischen Feld der freie elektrostatische Verformungseffekt, in der Literatur kurz als Elektrostriktion bezeichnet. Bereits dieser eine Verformungseffekt spaltet sich in eine große Vielzahl prinzipiell möglicher Realisierungsvarianten auf. Eine davon ist die Verwendung eines Piezo-Biegestreifens. Er kann in allen drei der o. g. Kategorien von mechanischen Abdrucksystemen verwendet werden.

Bisher werden solche Biegestreifen in der Drucktechnik kaum verwendet - jedenfalls nicht in im Einsatz befindlichen serienmäßigen Druckwerken - obwohl sie bereits eine breite Anwendung als elektromechanische Wandlerelemente finden /71, 72, 73/. Je nach Einsatzart des Piezo-Biegestreifens in den o. g. drei Kategorien muß er natürlich verschiedenen Anforderungen gerecht werden. Daher wurden an Piezo-Biegestreifen einige auf die Anwendung in der Drucktechnik orientierte Untersuchungen vorgenommen.

### 3. Untersuchungen an Piezo-Biegestreifen

Piezo-Biegestreifen können entweder als direkte Energiequelle für den zu verrichtenden Abdruckvorgang genutzt werden oder man verwendet sie als Koppelglied, das dann wahlweise den Energiefluß von der Quelle zum Abdruckelement unterbricht. Theoretisch und experimentell wurde untersucht, in welchem Maße und unter welchen Bedingungen

Piezo-Biegestreifen diese Aufgaben erfüllen können /74/.

Es wird hier im wesentlichen auf die Problemstellung, die Experimente und - in Ergänzung zu Pkt. 1.5.1.1. - auf die Materialdämpfung eingegangen. Nicht erwähnte Details können in /69, 70, 74/ nachgelesen werden. In /69/ findet sich auch das Ergebnis einer Patentrecherche bezüglich des Einsatzes von Piezo-Biegestreifen in der Drucktechnik. Recherchiert wurden die Länder USA, UdSSR, BRD, Großbritannien, Frankreich, CSSR und DDR zumindest bis zurück zum jeweiligen Einführungsjahr der ipk. Es wurde lediglich eine Patentschrift gefunden, die den Einsatz eines Piezo-Biegestreifens unter Verwendung druckempfindlichen Papiers beschreibt.

### 3.1. Problemstellung

In Bild 47 sind am Querschnitt durch einen einseitig eingespannten Biegestreifen die geometrischen Parameter angetragen. Es ist hier das Beispiel eines trilaminaren Biegestreifens gewählt. Als Zwischenstreifen wurde im Experiment Federstahlblech verschiedener Dicken  $S_3$  verwendet. Das gesamte Biegeelement gewinnt durch die Verwendung einer solchen Federstahlblechzwischenlage gegenüber einem bilaminaren Element - also ohne Zwischenlage - bedeutend an mechanischer Belastbarkeit und ist daher für den hier betrachteten Anwendungsfall wesentlich interessanter. Bilaminare Elemente müssen - wenn sie nicht mit einer in ihrer Dicke  $S_3$  gegenüber  $S$  zu vernachlässigenden Zwischenlage ausgestattet sind - in elektrischer Reihenschaltung betrieben werden. In Bild 48 sind die für die Beschreibung des Biegevorganges notwendigen Größen angetragen. Mit  $v_L$  wird die momentane Durchbiegung des Streifens am Streifenende (also bei  $\xi = L$ ) bezeichnet. Unter  $\bar{v}_L/2$  ist der Wert von  $v_L$  nach dem Abklingen der freien gedämpften Schwingung zu verstehen ( $\bar{v}_L = 2v_L(t \rightarrow \infty)$ ). Bild 49 zeigt eine solche experimentell ermittelte Funktion  $v_L(t)$ .

Bisherige Untersuchungen von Biegestreifen (z.B. /71/, /75/) hinsichtlich ihrer mechanischen und elektrischen Eigenschaften erstrecken sich größtenteils auf eine periodische Erregung der Biegestreifen, d.h. auf periodischen - meist harmonischen - Feldstärkeverlauf. Im vorliegenden Anwendungsfall ist dies aber von geringem Interesse. Hier dominiert die Notwendigkeit einer sprungförmigen Änderung der Feldstärke.

Je nach Anwendungsfall stehen  $v_L(t)$  mit den Werten  $t_d$  und  $v_{LE}$  (siehe Bild 48) oder  $\bar{v}_L$  im Vordergrund der Betrachtungen. Für die Anwendung wichtig ist ebenfalls die kinetische Energie  $\bar{W}$ , die der Biegestreifen zum Zeitpunkt  $t = t_d$  besitzt. Da der Bewegungsablauf

aber maßgeblich bestimmt wird von den Dämpfungseigenschaften des schwingenden Systems, ist die Bestimmung der Dämpfung auch hier das zentrale Problem.

### 3.2. Experimente

Verwendet wurden Biegestreifen aus dem Material "Piezolan S<sub>2</sub>" des VEB Keramische Werke Hermsdorf. Aus Bild 48 ist ersichtlich, daß die beiden Piezolan-Einzelstreifen elektrisch parallel geschaltet wurden. Gleiche Dicke S der Einzelstreifen vorausgesetzt, erlaubt die Parallelschaltung das 0,5-fache der Betriebsspannung bei Reihenschaltung, um die gleiche Feldstärke zu erreichen. Der Biegestreifen in Parallelschaltung hat gegenüber der Reihenschaltung die 4-fache Kapazität, was sich negativ auf die elektrische Zeitkonstante auswirkt. Dieser Einfluß ist jedoch im Vergleich zur mechanischen Zeitkonstante, die um etwa den Faktor  $10^5$  größer ist, von untergeordneter Bedeutung.

Für jedes Biegeelement wurden die Feldstärken schrittweise in sieben Stufen variiert. Jedes Biegeelement wurde mit fünf verschiedenen freien Längen L durchgemessen. Die gelieferten Elemente hatten eine Länge von 50 mm. Zugunsten einer möglichst sicheren Einspannung und aus Isolationsgründen konnte L nicht größer als 46 mm gewählt werden. Um die nötige Meßsicherheit zu gewährleisten, wurde die Messung für jede der möglichen Kombinationen etwa fünfmal wiederholt. Es zeigte sich jedoch, daß die Meßreihen nur minimale Abweichungen aufwiesen. Da insgesamt 15 Streifen verwendet wurden, waren also etwa 2500 Meßaufnahmen nebst Auswertung der  $v_L(t)$ -Funktion erforderlich.

Tabelle 7 gestattet einen Überblick über die untersuchten Biegeelemente. Der Fall  $S_3 = 0$  wurde mit einer biegeschlaffen Kupferfolie der Dicke 0,02 mm simuliert. Es wurde wieder die Meßanordnung von Bild 2 verwendet. Im Unterschied zu Bild 4 ist das Gehäuse der Meßeinrichtung an der Stelle des Führungsschlitzes für die Blende getrennt (s. auch Bild 51). Die erforderliche Blende wurde in der in Bild 50 gezeigten Weise befestigt. Die Blendenmasse betrug 150 mg. Der Biegestreifen wurde in einer entsprechend isolierten Schraubzange eingespannt (Bild 51). Wegen des relativ starken Stoßes, der beim impulsförmigen Erregen des Streifens von ihm auf das tragende Gestell übertragen wird, muß man, um Rückwirkungen auf den zu untersuchenden Streifen zu unterbinden, entweder dafür sorgen, daß die Stoßwellen im Gestell ohne Reflexionen abgeleitet werden oder die Materialdämpfung der Gestellmasse entsprechend groß ist. Mit Hilfe eines Wendepolschalters werden auf den Biegestreifen



rechteckförmige Spannungssprünge übertragen (Bild 52). Die Eichung der Meßeinrichtung erfolgt statisch mit Mikrometerschraube. Die Eichkurven sind streng linear.

Es ist denkbar, daß die Biegestreifen nicht nur eine bestimmte Funktion aufgrund der Durchbiegung  $v_L(t)$  bzw.  $\bar{v}_L$  erfüllen sollen, sondern gleichzeitig vielleicht mehrere aufgrund der Verformungen  $v_s(t)$  bzw.  $\bar{v}(\xi)$  (siehe Bild 47). Außerdem kann es bei Querbela- stung der Streifen in der Ebene der Biegelinie nützlich sein, durch eine Streifenbegrenzung getreu der Funktion  $\bar{v}(\xi)$  oder  $v_s(t)$  die Belastung abzufangen (Bild 53). Unter Verwendung eines Stroboskopes und/oder einer Hochfrequenzkamera kann  $v_s(t)$  fotografisch festge- halten werden, während man bei der statischen Biegelinie  $\bar{v}(\xi)$  mit einfachem Schattenrißverfahren gute Aufnahmen erhält (Bild 54). Es muß noch erwähnt werden, daß sämtliche Messungen bei Temperaturen zwischen  $+17^\circ\text{C}$  und  $+26^\circ\text{C}$  durchgeführt wurden. Nach Angaben des Herstellers ändert sich die Eigenfrequenz des Materials Piezolan S im Bereich von  $-20^\circ\text{C}$  bis  $+60^\circ\text{C}$  um 4 %.

Insgesamt vier Biegestreifen verschiedener Werte  $S$  und  $S_3$  wurden ei- ner Dauerbelastung von etwa  $10^8$  Lastspielen unterzogen. Die Frequenz betrug dabei 50 Hz bei einem Spannungssprung von 250 V. Es wurden  $v_{LE}$ -Werte je nach Streifen von etwa 3 mm bis 4,5 mm erreicht. Trotz dieser großen Beanspruchung konnten nach den Dauertests keine Ände- rungen der mechanischen Eigenschaften der Streifen festgestellt wer- den.

Für jeden Biegestreifen wurde die statische Steifigkeit festgestellt mit Hilfe definierter Massenbelastung am Stabende und für bestimmte Dauer der Belastung. Es ist zu bemerken, daß bei den hier verwen- deten Biegestreifen bei etwa 100 p bis 200 p Belastung nach etwa 20 Sekunden typische Kriecherscheinungen eintreten, als deren Folge sich Bruch einstellt.

Als erste Auswertung der Experimente zeigt Diagramm 10.1 sowohl die Abhängigkeit der Durchbiegung  $\bar{v}_L$  von der verwendeten freien Länge (also:  $\bar{v}_L(L)$ ) als auch die Relation  $\bar{v}_L(U)$ . Aus Gründen der Über- sichtlichkeit wurde auf das Ausziehen der Kurven verzichtet. Durch Überlegen von transparentem Papier können die gewünschten Kurven schnell herausgezeichnet werden. Die Theorie zeigt, daß bei Anlegen eines elektrischen Feldes und der damit verbundenen Biegemoment- belastung des Streifens eine quadratische Abhängigkeit der Durch- biegun  $\bar{v}_L$  von der freien Länge  $L$  zu erwarten ist. Dies wird hier im wesentlichen bestätigt, ebenso wie die aus der idealisierten An- nahme einer homogenen Feldstärkeverteilung theoretisch folgende

Proportionalität  $\bar{v}_L \sim U$  (siehe z.B. /70/). Dabei ist natürlich zu bemerken, daß die Meßunsicherheit mit kleineren Werten  $U$  oder  $L$  bzw.  $\bar{v}_L(L)$  wächst.

Für den in Bild 47 dargestellten Fall  $S_1 = S_2 = S$  läßt sich über das erweiterte Hookesche Gesetz für elektrostriktive Materialien und unter der Annahme eines ebenen Spannungszustandes sowie der mechanischen Isotropie des verwendeten Piezolan-Materials und der Bedingung konstanter Werte  $S$  in  $\xi$ - und  $\eta$ -Richtung im Vergleich zum allgemeineren Fall  $S_1 \neq S_2$  relativ leicht die Beziehung für die Durchbiegung  $\bar{v}_L$  ermitteln (/70/ oder /74/):

$$\bar{v}_L = K \cdot U \cdot L^2 \cdot A(S^*) \quad (53)$$

$$\text{mit } A(S^*) = \frac{2S^* + 1}{3S^{*2} + 3S^* + 1 + \alpha S^{*3}},$$

wobei  $\alpha = \frac{Y_2}{Y_P}$  das Verhältnis der Elastizitätsmoduli der Zwischenlage (Federstahlblech, Kupferfolie etc.) und des Piezolan-Streifens darstellt und  $S^* = S_3/2 \cdot S$  ist. Es ist  $K$  der Übertragungsfaktor und als solcher abhängig von Piezomodul  $d_{31}$  (s. Herstellerangaben) und  $S$  ( $K = K_1 d_{31}/S^2$ ;  $K_1$ : konstanter Faktor). Für die bereits erwähnte Kupferfolie von 0,02 mm Dicke ergibt sich  $A(S^*)_{cu} \approx 1$ . Von den Absolutwerten aus Glg. (53) wird man unabhängig, wenn die zu errechnende Auslenkung  $\bar{v}_L$  auf eine andere, z.B. bekannte Auslenkung  $\bar{v}_{Lcu}$  eines Biegestreifens mit Kupferfolie als Zwischenlage (Index: cu) und gleicher Länge  $L$  sowie bei gleichem Spannungssprung  $U$ , bezogen wird:

$$\bar{v}_L = \frac{S_{cu}^2}{S^2} A(S^*) \cdot \bar{v}_{Lcu} \quad (54)$$

Kennt man also die Auslenkung und Geometrie eines Biegestreifens des Materials Piezolan  $S_2$  mit biegeschlaffer Kupferfolie als Zwischenlage (s. D 10.1), dann gestattet Glg. (54) die Bestimmung von  $\bar{v}_L$  jedes anderen beliebigen Biegestreifens bei gleichen Werten  $L$  und  $U$ . Die Breite  $B$  ist ohne Bedeutung. Voraussetzung ist jeweils nur die Bedingung  $S_1 = S_2 = S$ . Diagramm 10.2 zeigt ein auf der Basis der Glg. (54) gezeichnetes Kennlinienfeld, das für den beschriebenen Zweck angewendet werden kann. Es kann damit auch für eine vorgegebene Auslenkung  $\bar{v}_L$  zielgerichtet ein Streifen mit gewünschter Geometrie gesucht werden. In D 10.2 sind neun Meßpunkte eingetragen. Außerdem sind die jeweils theoretischen Werte angekreuzt. Bei der großen Vielzahl der zur Gewinnung der neun Meß-



punkte notwendigen Versuchsreihen (es mußten allein dafür etwa 1200 Aufnahmen ausgewertet werden) und der erneuten Mittelung bereits gemittelter Werte bei gleichzeitiger Verhältnisbildung bestimmter Werte verschiedener Streifen bis zu einer Vielzahl von Ergebniswerten  $\bar{v}_L / \bar{v}_{Lcu}$  und deren nochmaliger Mittelwertbildung ergibt sich eine verblüffend gute Übereinstimmung mit den durch Kreuz gekennzeichneten errechneten Werten. Auch hier gelten die unter 1.4.2. getroffenen Aussagen bezüglich der Fehlerabschätzung. Es kamen generell nur die sechs Werte einer Meßreihe in die Auswertung, für die die Varianz  $\bar{s}^2$  das  $0,9 \cdot 10^{-2}$ -fache des Quadrates des arithmetischen Mittelwertes nicht überstieg.

Für die  $\bar{v}_L$ -Bestimmung kann auch das ebenfalls eingezeichnete Kennlinienfeld der Werte  $S_3/S_{cu}$  verwendet werden. Bei Bedarf ist D 10.2 durch weitere Kennlinien über  $S^* = S_3/2 \cdot S$  leicht zu ergänzen.

Ein Beispiel verdeutlicht die Anwendung von D 10.2: Bei einem Spannungssprung von  $2 \cdot U = 200 \text{ V}$  und einer freien Länge von  $L = 44 \text{ mm}$  wurde für einen Biegestreifen mit Kupferzwischenlage  $S_{3cu} = 0,02 \text{ mm}$  und einer Piezolandicke  $S_{cu} = 0,4 \text{ mm}$  die Auslenkung  $\bar{v}_{Lcu} = 0,45 \text{ mm}$  gemessen. Gesucht ist die Auslenkung  $\bar{v}_L$  eines Streifens mit  $S = 0,2 \text{ mm}$  und  $S_3 = 0,32 \text{ mm}$  bei gleichen Werten  $2 \cdot U$  und  $L$ .

Es sind:  $\frac{S_{cu}}{S} = 2, \quad \frac{S_3}{S_{cu}} = 0,8, \quad S^* = 0,8.$

Zum Finden des gesuchten Faktors (hier: 1,52) auf der Ordinate in D 10.2 genügen aber bereits zwei der drei eben ermittelten Zahlenwerte.

Damit wird:  $\bar{v}_L = 1,52 \cdot \bar{v}_{Lcu}.$

Das Beispiel ist im Diagramm 10.2 eingetragen. Ist  $\bar{v}_L$  bei gleichen Querschnittsparametern, aber anderen Werten  $U$  und  $L$  gesucht, so sind die entsprechenden Faktoren aus D 10.1 zu entnehmen. Soll anderes Piezolanmaterial Verwendung finden als bei  $\bar{v}_{Lcu}$  zugrunde liegt, muß zudem noch mit dem Verhältnis beider Piezomoduli multipliziert werden. Der im Beispiel angegebene Wert  $\bar{v}_{Lcu} = 0,45$  ist experimentell gesichert. Mit diesem Basiswert und mit D 10.1 können beliebige  $\bar{v}_L$  ermittelt werden.

Für die Anwendung der Biegestreifen mitentscheidend ist die Zeit bis zum Erreichen des Zeitpunktes  $t_d$  (s. Bild 48). Zu diesem Zeitpunkt durchläuft  $v_L(t)$  erstmals den Wert  $\bar{v}_L/2$ . In D 10.3 sind die experimentellen Ergebnisse zusammengestellt. Es zeigt sich, daß bei konstanten Geometrie- und Materialparametern die Spannungsänderungen keinen Einfluß auf  $t_d$  haben. Die  $t_d$ -Werte liegen bei den untersuch-



ten Streifen zwischen 1 ms und 3,5 ms. Zum Zeitpunkt  $t_d$  wird das antreibende Moment zu Null, d.h. der Biegestreifen hat zu diesem Zeitpunkt seine maximale kinetische Energie. Sie soll mit  $\bar{W}$  bezeichnet werden. Aus der Ähnlichkeit der dynamischen Verformung mit der statischen Biegelinie läßt sich der Einfluß der Stabeigenmasse  $m_s$  auf  $\bar{W}$  bestimmen. Es ergibt sich danach eine reduzierte Masse  $m_r$  von  $m_r \approx m_s/4$ . Die Werte  $\bar{W}$  wurden über grafische Differentiation der Funktion  $v_L(t)$  bei  $t = t_d$  gewonnen. Diese Tangentenbildung ist naturgemäß stark fehlerbehaftet. D 10.4 gestattet aber trotzdem eine etwaige Zuordnung der Streifen und eine Abschätzung der zu erwartenden Werte. Versuchsweise wurden an manche Streifen kurze Drucknadeln angeklebt und Druckpunkte erzeugt. Nach D 5.6 ist für eine Lage eine Energie von etwa 0,2 mJ notwendig, um einen Druckpunkt zu erzeugen bei einem Nadeldurchmesser  $d = 0,3$  mm und  $v_r = 0$ . Mit den Streifen S 2 und S 3 konnten kontrastreiche Abdrücke erzielt werden. Der aus D 10.4 abzulesende Wert  $\bar{W} \approx 0,29$  mJ für diese Teststreifen mit  $L = 44$  mm deckt sich gut mit diesen früheren Ergebnissen. Mit den Streifen S 9, S 11 und S 14 wurden sogar zwei bis drei Kopien erzielt.

In der einfachsten Modellvorstellung wird der Biegestreifen unter Beachtung der Dämpfung als masselose Feder mit Endmasse gedeutet. Als beschreibende Koordinate kann der Winkel  $\varphi = \varphi(t)$  gewählt werden (s. Bild 55). Unter Berücksichtigung der Näherungen  $v_L(t) \approx L \cdot \dot{\varphi}$  und  $\sin \varphi \approx \varphi$  sowie  $\cos \varphi \approx 1$  und der Bedingung  $\gamma \leq 0,1$  ergibt sich die Bewegungsgleichung in der Näherung:

$$v(t) \approx -\bar{v}_L e^{-\frac{\omega \gamma}{2} t} \left( \cos(\omega t) + \frac{\gamma}{2} \sin(\omega t) \right) + \frac{\bar{v}_L}{2} \quad (55)$$

mit  $\gamma = \gamma \left( \frac{\bar{v}_L}{2} \right)$ .

Der Vergleich der experimentell gewonnenen Funktionen  $v_L(t)$  mit Glg. (55) unter Verwendung der ebenfalls experimentell ermittelten Werte  $\omega$  und  $\gamma$  (s. Pkt. 3.3.) zeigt, daß die Verwendung von Glg. (55) für sprungförmigen Feldstärkeverlauf durchaus gerechtfertigt ist. Die Frage nach dem Bewegungsverhalten des Biegestreifens bei beliebig anderem Zeitverlauf der Feldstärke kann dann ohne ausführliche Experimente über das Duhamel'sche Integral erfolgen. So können rechnerisch die Kennwerte  $t_d$ ,  $v_{LE}$  und  $\bar{v}_L$  für andere Feldstärkeverläufe  $E(t)$  ermittelt werden. Andere Funktionen  $E(t)$  interessieren, wenn man dem Biegestreifen eine bestimmte Funktion  $v_L(t)$  aufzwingen will. Das Duhamel-Integral wird dann nach

der gesuchten Funktion  $E(t)$  aufgelöst.

Wie schon erwähnt, hat der Biegestreifen zum Zeitpunkt  $t = t_d$  seine maximale Geschwindigkeit erreicht:

$$\dot{v}_L(t=t_d) = \dot{v}_{Lmax} \quad (56)$$

Es ist

$$\dot{v}_{Lmax} = \dot{v}_{Lmax}(L, S, S_3, B).$$

Extremwertuntersuchung von Glg. (55) liefert

$$\omega t_d = \arctan\left(\frac{\omega^2 + \varkappa^2}{\omega \varkappa + \varkappa^3/\omega}\right), \quad (57)$$

wobei  $\varkappa \approx \frac{\omega_0 \gamma}{2}$  und  $\omega \approx \omega_0$

angenommen werden.

Damit folgt

$$\dot{v}_{Lmax} = \bar{v}_L e^{-\frac{\varkappa}{\omega}(\omega t_d)} \left(\omega + \frac{\varkappa^2}{\omega}\right) \sin \omega t_d \quad (58)$$

Da die statische Biegesteifigkeit  $c_B = 3YI_\eta / L^3$  mit  $Y$  als Elastizitätsmodul und  $I_\eta$  als zugehöriges Flächenträgheitsmoment auch in der Form  $c_B = YB(2S + S_3)^3 / 4L^3$  geschrieben werden kann und  $m_S = L \cdot B \cdot (2S \rho_p + S_3 \rho_3)$  mit  $\rho_p$  als Dichte des Piezolanmaterials und  $\rho_3$  als Dichte der Zwischenlage, kann Glg. (58) in die Form (56) umgeschrieben werden. Die Extremwertbetrachtung führt über die Reihenentwicklung von  $\ln|\varphi_i| = \pi \gamma_i$  mit  $\varphi_i \approx 1 + \varepsilon_i \cdot i$ , wobei  $i = L, B, S_3, S$  und  $\varepsilon_i$  den Zuwachs der Kurven in D 10.7 bedeutet, und die Näherung  $\arctan(2\pi/\varepsilon_i \cdot i) \approx \frac{\pi}{2}$  auf die Abhängigkeiten:

$$\dot{v}_{Lmax}(L) \approx \frac{K_1}{L^2} e^{-\beta L} \quad (59)$$

mit

$$K_1 = \frac{\bar{v}_L}{2} \sqrt{\frac{Y(2S + S_3)^3}{2S\rho_p + S_3\rho_3}}$$

und

$$\beta = \frac{\varepsilon_L}{4} ;$$

$$\dot{v}_{Lmax}(B) \approx K_2 e^{-\alpha B} \quad (60)$$

mit

$$K_2 = \frac{\bar{v}_L}{2L^3} \sqrt{\frac{Y(2S + S_3)^3}{2S\rho_p + S_3\rho_3}}$$

und

$$\alpha = \frac{\varepsilon_B}{4} ;$$

$$\dot{v}_{Lmax}(S_3) \approx \left[ \frac{(K_3 + K_4 S_3)^2 (K_5 + K_8 S_3)}{K_6 + K_7 S_3} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\epsilon_{S_3}}{4} \cdot S_3} \quad (61)$$

Die Abhängigkeit  $\dot{v}_{Lmax}(S)$  hat die gleiche Struktur wie Glg. (61). Die Untersuchung von Glg. (61) auf Extremwerte führt auf eine Glg. fünften Grades. Bei Vernachlässigung der Glieder ab dritter Ordnung ist eine Auflösung leicht möglich. Man findet, daß (61) mit  $a = g_p/g_3$  ein Maximum bei

$$S_{3max} = \frac{2S^3 + \left[ 4S^6 - \frac{8S^3}{\epsilon_{S_3}} \left( 2 \frac{S^2(1+2a)}{a} + 6 \frac{S(1+a)}{a\epsilon_{S_3}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{2 \frac{S^2(1+2a)}{a} - 6 \frac{S(1+a)}{a\epsilon_{S_3}}} \quad (62)$$

hat. Wichtig ist, daß  $S_{3max}$  nochmals von  $S$  abhängt. Es ist also ein bestimmtes Verhältnis  $2S^* = S_3/S$  zu wählen, um  $\dot{v}_{Lmax}$  bei konstanten Werten  $L$  und  $B$  zu erhalten.

Für ein Beispiel wurde  $S_{3max}$  ermittelt. Für  $S = 0,3$  mm und  $a = 0,2$  folgt aus Glg. (62):  $S_{3max} \approx 0,15$  mm. Bild 56 zeigt qualitativ den Verlauf von  $\dot{v}_{Lmax}(L)$ ,  $\dot{v}_{Lmax}(B)$  und  $\dot{v}_{Lmax}(S_3)$ . Um auf  $\bar{w}_{max}(S_3)$  zu schließen, muß die Funktion  $\dot{v}_{Lmax}(S_3)$  mit  $\frac{m_r}{2} = \frac{m_s}{8} = \frac{L \cdot B}{8} (2S \cdot g_p + S_3 \cdot g_3)$  multipliziert werden, also mit einer Geraden der Steigung  $LB \cdot g_3/8$ . In Abhängigkeit von dieser Steigung und dem Absolutglied wird das Maximum der Energie an einer anderen Stelle  $S_3$  liegen als bei  $\dot{v}_{Lmax}(S_3)$ .

In D 10.5 sind Ergebnisse dargestellt. Die Übersicht in Tabelle 5 zeigt, daß jeweils nur drei Meßpunkte erhältlich waren. Diagramm 10.5 dient damit der qualitativen Bestätigung von Glg. (61) bzw. Bild 56.

### 3.3. Materialdämpfung

Bei der Bewegung des Biegestreifens liegen zwei Dämpfungsanteile vor: eine äußere Dämpfung der Bewegung durch Überwindung des Luftwiderstandes und die innere Dämpfung, die sog. Materialdämpfung. Als Kennwert der Materialdämpfung wird zunächst das logarithmische Dekrement  $\delta$  verwendet. Die Ermittlung der Dämpfungswerte aus den Amplitudenfolgen  $v_{Li}$  (s. Bild 48) wird ungenauer mit wachsendem  $i$ . Mit der einfachen Modellvorstellung nach Glg. (55) kann die  $\delta$ -Bestimmung über die recht genau abzunehmenden Werte  $v_{LE}$  und  $\bar{v}_L$  vorgenommen werden. Es kann geschrieben werden:



$$\delta = \ln |\varphi| \quad ; \quad \varphi := \frac{1}{\bar{\varphi} - 0,5} \quad ; \quad \bar{\varphi} := \frac{V_{LE}}{\bar{V}_L} \quad (63)$$

$\delta = 0$  liegt vor bei  $\bar{\varphi} = 1,5$  bzw.  $\varphi = 1$ ;  
für  $\bar{\varphi} \rightarrow 0,5$  (bzw.  $\varphi \rightarrow \infty$ ) folgt  $\delta \rightarrow \infty$ .

Material und Geometrie des Biegestreifens beeinflussen  $\delta$  maßgeblich. Der Einfluß des Luftwiderstandes ist wohl zu vernachlässigen, so daß  $\delta$  allein der Werkstoffdämpfung des Systems zugeschrieben werden kann. In diesem Falle ist nun analog zu den Betrachtungen unter 1.5.1.1. der Dämpfungsparameter in der zugehörigen Dgl. keine Konstante mehr, sondern vom Schwingweg abhängig:

$$D = \bar{k}(v_L) \cdot \dot{v}_L$$

Die Funktion  $\bar{k}(v_L)$  wird vom schwingenden Werkstoffvolumen, dem Material und der Geometrie des Streifens beeinflusst. Ausführliche Betrachtungen zu diesem Problemkreis findet man in /21/. Die Anknüpfung an die hier gestellte Problematik wird in /69/ vorgenommen. Es sei hier lediglich vermerkt, daß man bei Kenntnis der Materialdämpfung eines bestimmten Werkstückes (z.B. aus entsprechenden Experimenten) durch Bildung eines allgemeingültigen "Elementdämpfungs-wertes" und durch erneute Rückrechnung die Materialdämpfung anderer Werkstücke gleichen Materials, aber anderer Geometrie und Belastung, rechnerisch ermitteln kann.

Da in der Fachliteratur - wie auch im Kapitel 1 - an Stelle des logarithmischen Dekrementes häufig der Verlustwinkel  $\gamma$  des Bauelementes angegeben wird, macht sich eine Umrechnung von  $\delta$  in  $\gamma$  und umgekehrt notwendig. Darum soll hier darauf eingegangen werden:

$$\begin{aligned} \delta &= \ln \left| \frac{q_v}{q_{v+1}} \right| = \frac{\pi \cdot x}{\omega} \\ \delta^* &= \ln \left| \frac{q_v}{q_{v+2}} \right| = 2\delta \quad \text{bzw.} \quad q_{v+2}^2 = q_v^2 e^{-4\delta} \\ \delta_w &= 4\delta = \ln \left| \frac{q_v^2}{q_{v+2}^2} \right| = \ln \left| 1 + \frac{q_v^2 - q_{v+2}^2}{q_{v+2}^2} \right| \end{aligned} \quad (64)$$

$\delta_w$  : logarithmisches Dekrement der Energie, berechnet aus dem Energieverlust über eine Periode.

Mit den Glg. (7) und (8) folgt unter Beachtung von (64):

$$\begin{aligned} \delta_w &= \ln |1 + \gamma e^{4\delta}| \\ \text{bzw.} \quad \delta &= \frac{1}{4} \ln |1 + 2\pi e^{4\delta} \sin \gamma| \end{aligned}$$

oder

$$\gamma = \arcsin \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-4\delta}) \quad (65)$$

Dies ist die exakte Umrechnung von  $\sigma$  in  $\gamma$  ohne Näherung. Im Diagramm 10.6 sind die Zusammenhänge grafisch dargestellt. Es folgt u.a. die Näherung:

$$\gamma \approx \frac{2\sigma}{\pi} \quad (66)$$

Beim Erfassen des Abdruckvorganges unter 1. kam es darauf an, die Dämpfungskraft in Abhängigkeit vom Momentanwert des Weges anzusetzen. Wegen der damit verbundenen Probleme bei der Lösung der Dgl. ist es zweckmäßig, sich hier auf den Ansatz  $F_D = \bar{k}(\bar{v}_L/2) \dot{v}_L$  zu beschränken, also auf die Abhängigkeit der Dämpfung von dem Niveau, um das der Streifen ausschwingt. In die Bewegungsdgl. wird also ein für die jeweils betrachtete Schwingung konstanter Wert  $\bar{k}$  eingesetzt oder einem bestimmten Wert  $\bar{v}_L$  wird ein bestimmtes  $\sigma$  zugeordnet:  $\sigma = \sigma(\bar{v}_L/2)$ . Aus dem Experiment folgt, daß diese Abhängigkeit in dem untersuchten Verformungsbereich als linear angesehen werden kann:

$$\sigma \approx \eta^* \frac{\bar{v}_L}{2} \quad (67)$$

Dabei wird der Faktor  $\eta^*$  vom mitschwingenden Volumen  $V_m$  des Biegeelementes bestimmt. Umgerechnet auf das anteilige Volumen von Zwischenlage und Piezolan-Material gewinnen diese Untersuchungen dann allgemeine Aussagekraft. Wären die drei Schichten des Biegeelementes nicht fest miteinander verbunden (verklebt), sondern lose aufeinanderliegend, dann würden sich die Biegesteifigkeiten der einzelnen Schichten einfach zur Gesamtsteifigkeit addieren. Genauso könnte man dann die Dämpfungsenergien der einzelnen Schichten zur Gesamtdämpfungsenergie addieren (Reibung an den Flächen nicht beachtet). Bei fest verklebten Schichten müssen bei gleicher Auslenkung  $\bar{v}_L/2$  zusätzliche Verformungen (Dehnung, Stauchung) der Ober- bzw. Unterschicht aufgebracht werden. Da sich die Erfassung der Dämpfungseigenschaften dann schwierig gestaltet, bleibt zu untersuchen, ob die erwähnte Näherung der Addition der einzelnen Dämpfungsanteile den realen Werten genügend nahe kommt:

$$\gamma_g^2 \stackrel{?}{=} \gamma_3 + \gamma_p$$

Mit der Näherung (66) folgt für die Dämpfungsgröße  $\varphi$ :

$$\ln |\varphi_g| \stackrel{?}{=} \ln |\varphi_3| + \ln |\varphi_p| \quad (68)$$

mit den Indizes  $g$  für gesamt  
 $3$  für die Zwischenlage  
 und  $p$  für das Piezomaterial.

Über die Näherung

$$\varphi_i \approx 1 + \varepsilon_i V_i \quad (69)$$

worin  $i = g, 3, p$  und  $V_i$  das jeweilige Volumen bedeuten, folgt die Beziehung

$$\ln |1 + \varepsilon_g V_g| = \ln |1 + \varepsilon_3 V_3 + \varepsilon_p V_p + \varepsilon_3 \varepsilon_p V_3 V_p|$$

und schließlich mit der Abkürzung

$$S^* = \frac{S_3}{2 \cdot S} = \frac{V_3}{V_p}$$

die Bestimmungsgleichung

$$\varepsilon_g = \frac{S^* \varepsilon_3 + \varepsilon_p}{1 + S^*} + \frac{S^* \varepsilon_3 \varepsilon_p V_g}{(1 + S^*)^2}, \quad \text{wobei } V_g = V_p (1 + S^*) \quad (70)$$

Die Rechtfertigung für den Ansatz (69) liefert Diagramm 10.7. Für dieses Diagramm wurden Meßwerte von 13 verschiedenen Streifen herangezogen. Aus D 10.7 b) ist erkennbar, daß  $\varepsilon_{Bs}$  - also der  $\varphi$ -Zuwachs der Streifen mit Kupferfolienzwischenlage - kleiner ist als  $\varepsilon_B$ , da bei  $\varepsilon_{Bs}$  im wesentlichen nur das Piezolan die Dämpfung aufbringt, während bei  $\varepsilon_B$  die Federstahlzwischenlage beteiligt ist. Werden  $\varepsilon_3$  und  $\varepsilon_s$  aus D 10.7 a) und c) anteilmäßig auf Breitenzuwachs umgerechnet, ergibt sich sehr genau Übereinstimmung mit dem direkt gemessenen Wert  $\varepsilon_B$  aus D 10.7 b). Außerdem muß  $\varepsilon_{Bs}$  übereinstimmen mit  $\varepsilon_s$ . Auch das bestätigt sich.

Mit  $\frac{d(\quad)}{dV_i} = (\quad)'$  werden

$$\varphi'_g(V_g) = \varepsilon_g + \frac{S^* \varepsilon_3 \varepsilon_p V_g}{(1 + S^*)^2}$$

$$\varphi'_g(B) = L (2 \cdot S + S_3) \cdot \varphi'_g(V_g).$$

Nebenbei zeigt sich, daß  $\varphi_g(B) = \varphi_g(V_g)$ . Für die experimentelle Nachprüfung wurde - wie auch aus D 10.7 ersichtlich -  $L = 40$  mm gewählt. Daher muß dieser Wert auch für die Nachrechnung verwendet werden. Für Werte  $B \leq 3$  mm zeigt sich, daß der Term  $S^* \varepsilon_3 \varepsilon_p V_g / (1 + S^*)^2$  in Glg. (70) gegenüber  $(S^* \varepsilon_3 + \varepsilon_p) / (1 + S^*)$  vernachlässigt werden kann. Es ergibt sich damit die Möglichkeit einer weiteren Vereinfachung:

$$\varepsilon_g \approx \varepsilon_g^* = \frac{S^* \varepsilon_3 + \varepsilon_p}{1 + S^*} \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} L = 40 \text{ mm} \\ B \leq 3 \text{ mm} \end{array} \quad (71)$$



Unter Verwendung von Glg. (70) folgt:

$$\delta_g = \ln \left| 1 + \frac{S^* \epsilon_3 + \epsilon_p}{1 + S^*} V_g + \frac{S^* \epsilon_3 \epsilon_p}{(1 + S^*)^2} V_g^2 \right| \quad (72)$$

Im Diagramm 10.8 erfolgt der Vergleich der Berechnung nach Glg. (72) mit dem Experiment. Dabei wurde  $S^* = 0,125$  gewählt. Wenn  $V_g = 300 \text{ mm}^3$  nicht überschritten wird, liegen die Abweichungen zwischen Berechnung und Experiment auch für andere  $S^*$ -Werte nicht über 10 %.

Biegestreifen mit einer Zwischenlage aus Federstahlblech von  $S_3 = 0,1$  bis  $0,3 \text{ mm}$  haben bereits eine genügend große Biegefestigkeit. Sollen Biegestreifen als Stell- oder Antriebsglieder verwendet werden, dann ist mit einer Breite von  $3 \text{ mm}$  eine genügend große Angriffsfläche für andere Bauelemente gegeben. Da mit  $L = 40 \text{ mm}$  und  $U = 200$  bis  $250 \text{ V}$  für  $S^* < 1$  Auslenkungen  $\bar{v}_L$  bis zu  $2,5 \text{ mm}$  gemessen werden, überstreicht der erwähnte  $V_g$ -Bereich bereits eine Vielzahl technisch interessanter Parameterkombinationen. Mit Hilfe der Kurven aus D 10.8 können nun über Glg. (68) bzw. über  $\delta_g \approx \delta_3 + \delta_p$  die Werte  $\delta_g$  für beliebige  $S^*$  ermittelt werden. Die Abweichungen vom Experiment sind in der Tatsache begründet, daß bei Glg. (68) die nicht zutreffende Annahme lose aufeinanderliegender Schichten Piezolan und Federstahlblech getroffen wurde.

Aus D 10.8 kann der in Glg. (67) auftretende Faktor  $\eta^* = \eta^*(S^*, V_g)$  für den angegebenen Wert  $L$  bestimmt werden. Andere  $L$ -Werte bedingen erneute Messungen der  $\epsilon_i$ -Werte.

### 3.4. Anwendung des Piezo-Biegestreifens

Die Untersuchungen haben gezeigt, daß die Verwendung der Biegestreifen als Koppelglieder prinzipiell möglich ist. Streifenendmassen von  $150 \text{ mg}$  werden ohne Schwierigkeiten bewegt. Die erreichbaren Wege und Zeiten können näherungsweise aus Glg. (55) ermittelt werden, wobei die Biegesteifigkeit noch bestimmt werden muß. Die Verstellwege der Biegestreifen sollten im Interesse einer sicheren Funktion der Koppelvorrichtung nicht kleiner als  $0,5 \text{ mm}$  gewählt werden. Die Auswahl der Streifen kann anhand von Diagramm 10.1 geschehen. Aus D 10.2 sind beliebige andere Streifen bestimmbar.

In /72/ wurden bereits einige Anwendungsmöglichkeiten der Piezo-Biegestreifen genannt. Es ist z.B. auch möglich, mit bestimmten Anordnungen mehrerer Streifen gänzlich andere Anwendungsgebiete zu erschließen (z.B. Schrittmotore).

Der Einsatz der Biegestreifen als Koppelglieder kann so gestaltet werden, daß die Biegestreifen selbst keinen äußeren mechanischen Belastungen unterworfen sind, sondern diese Belastungen orthogonal zur

Biegeebene auf die entsprechend gestaltete und gestützte (geführte) Endmasse wirken. Wie oben bereits erwähnt, wurden einige Biegestreifen deswegen etwa  $10^8$  Lastspielen bei 50 Hz ohne äußere Belastung unterzogen. Veränderungen der mechanischen Eigenschaften der Streifen konnten dabei nicht festgestellt werden. Es muß lediglich auf ein sauberes Verkleben der Piezolanstreifen mit der Zwischenlage geachtet werden, da sich sonst bei längerem Einsatz der Streifen auf den Oberflächen Funkenstrecken ausbilden, die dann die Brauchbarkeit des Streifens erheblich einschränken.

Im Beispiel S 10 (Tabelle 7) liegt  $t_d$  etwa bei 1,5 ms. Nach dieser Zeit ist also die Einkopplung vollzogen und der eigentliche Abdruckvorgang kann beginnen, von dessen Dauer nun bestimmt wird, ob die Gesamtzykluszeit wesentlich die Summe von Ein- und Auskopplung (bei S 10 also ca. 3 ms) übersteigt. Zum Beispiel ist es sicher möglich, mit einem ständig und schnell oszillierenden Druckkopf (s. Bild 57b) die Abdruckzeit auf ca. 1 ms zu beschränken. So kann ein robustes und zuverlässiges sowie leistungsstarkes (große Anzahl Kopien, hohe Zeichenfrequenz) Druckwerk entworfen werden.

Beim Einsatz der Streifen als direktes Antriebsmittel von Druckelementen (z.B. Drucknadeln) erleiden die Streifen eine Stoßbelastung in der Biegeebene. Die Reaktion der Biegestreifen auf diese Stoßbelastung wurde getestet, indem an manche Streifen kurze Druckstifte angeklebt und diese Streifen dann Dauerbelastungen unter Anschlag an eine Druckwalze bei 50 Hz unterzogen wurden. Nach etwa  $7 \cdot 10^7$  Stößen zeigten auch hier die sorgfältig gearbeiteten Streifen keinerlei Verschleißerscheinungen. Biegestreifen ohne Stahlzwischenlage sind hierfür allerdings unzuverlässig (Bruchgefahr). Es werden mit den hier verwendeten Streifen zwei und teilweise bis zu vier Kopien (S 10) ausreichender Qualität erzielt, wobei immer beachtet werden muß, daß die erreichbare kinetische Energie in starkem Maße von den Biegestreifenparametern abhängt. Bei der praktischen Anwendung der Streifen in einem Druckwerk müßte vorteilhafterweise bei Erreichen der maximalen Eindringung in den Aufzeichnungsträger (bei S 10 also etwa nach 2,5 ms) umgepolt werden. Der Streifen hat dann nach insgesamt ca. 5 ms den Druckvorgang beendet. Dabei ist bei Erreichen der Ausgangslage auf eine entsprechende Dämpfung zu achten. Ein solcher Biegestreifen könnte damit maximal bis ca. 200 Punkte/s drucken. In Bild 57 c ist eine konstruktive Lösungsmöglichkeit eines solchen Antriebes skizziert.

Die notwendigen, relativ hohen Spannungen erschweren generell die konstruktive Lösung eines Druckwerkes auf dem Prinzip der Piezo-Biegestreifen.

In /69/ sind einige Möglichkeiten der Anwendung von Biegestreifen und Piezo-Keramiken anderer geometrischer Form beschrieben.

#### 4. Ökonomische Betrachtung

Die vorgestellte rechnerische Erfassung der Zeitabhängigkeit der Bewegungsgrößen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung beim Stoß gestattet es, bei bekannten Eingangsgrößen und Stoßbedingungen die wichtigsten Stoßkenngrößen, wie z.B. maximale Eindringung und Belastung sowie Stoßdauer und Rückprallgeschwindigkeit, unter Beachtung der Energieverluste schnell zu ermitteln. Abgesehen davon, daß die vorgelegte Arbeit eben wegen der Einbeziehung der Dämpfungseigenschaften einen Beitrag zur weiteren theoretischen Durchdringung des Stoßvorganges darstellt, hat eine schnelle und unkomplizierte Bestimmung wichtiger Stoßkenngrößen bei der Konzipierung von Druckwerken mit schlagender Kontrasterzeugung besondere Bedeutung. Zusammen mit den vorliegenden Diagrammen zum Abdruckvorgang ist es damit möglich, ausgehend von vorgegebenen Bedingungen der drucktechnischen Anwendung (Schriftgüte, Nutzen, Schreibgeschwindigkeit), sofort die wesentlichsten gestalterischen Vorgaben (Energieaufwand, Druckelementmasse, freier oder gebundener Druck (s. Tabelle 1), Schwenkbewegungen des Druckkopfes zur Verminderung der Relativgeschwindigkeit  $v_r$  etc.) für das zu entwickelnde Druckwerk konkret angeben zu können. Dies erspart einen beträchtlichen Teil langwieriger Versuche mit ständig zu verbessernden Funktionsmustern und damit Entwicklungskosten sowie Zeitverluste bei der Überleitung neuer Druckwerke.

Im Kapitel 2. der Arbeit werden das Prinzip der drückenden Kontrasterzeugung vorgestellt und Prinziplösungen angegeben. Die wesentlichsten wirtschaftlich-technischen Vorteile der drückenden Kontrasterzeugung sind: geräuschloser Druck, hohe Schreibgeschwindigkeit und große Anzahl Kopien, geringer Druckelementverschleiß,  $v_r = 0$  (Kompensierung mit entsprechendem technischen Aufwand wird nicht benötigt) sowie gleichbleibende Druckqualität.

Umfangreiche Experimente mit Piezo-Biegestreifen liefern die Aussage, daß diese Biegestreifen prinzipiell einsetzbar sind sowohl als direkter Antrieb von massearmen Druckelementen als auch zur Auswahl der Druckelemente. Im zweiten Falle lassen sich sehr robuste und leistungsstarke Druckwerke aufbauen. Der Einsatz von Biegestreifen als direkter Antrieb bringt keine wesentlichen Vorteile im Vergleich zu anderen bekannten Verfahren.

Die vorgelegten Ergebnisse gestatten es, die Durchbiegungen des Biegestreifenendes ohne weitere Experimente und Berechnungen für belie-



bige Biegestreifen mit der Bedingung  $S_1 = S_2$  (s. Bild 47) leicht und schnell angeben zu können.

##### 5. Schlußbetrachtung/Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zur theoretischen Durchdringung des Abdruckvorganges schlagender mechanischer Kontrasterzeugung und zur Weiterentwicklung neuer Druckprinzipien.

Zentrales Problem der Arbeit ist die experimentelle und rechnerische Erfassung des beim Abdruckvorgang entstehenden Stoßes zwischen Druckelement und Aufzeichnungsträger. Die wichtigsten Stoßkenngrößen (Stoßdauer, maximale Stoßkraft, Stoßzahl, maximale Eindringung) haben besondere Bedeutung für die schlagende Kontrasterzeugung, denn sie bestimmen Druckgeschwindigkeit und Druckgüte. Umfangreiche Experimente erlauben es, die wichtigsten Abhängigkeiten drucktechnisch interessanter Parameter in Diagrammen darzustellen. Besonderer Wert wurde auf eine möglichst einfache rechnerische Erfassung des Abdruckvorganges gelegt. Dabei galt wegen der Notwendigkeit der physikalischen Deutung (Begründung des Funktionsverlaufes und Möglichkeiten seiner gezielten Änderung durch Variation bestimmter Parameter; Erkennen des Einflusses der beteiligten vorgegebenen Größen auf den Funktionsverlauf, ohne erneute Versuche durchführen zu müssen) und wegen eines möglichst breiten Anwendungsgebietes der Ergebnisse die Prämisse, bei der Lösungsfindung von der Bewegungsdgl. auszugehen und nicht mit aus Versuchsreihen gefundenen Approximationsformeln zu arbeiten.

Als geeignet stellt sich das Kelvinmodell heraus, wobei die Feder nichtlinear und das Dämpfungselement wegabhängig ist. Der Stoßvorgang wird als Teil der ersten Halbperiode der freien Schwingung dieses Modells angesehen. Charakteristisch ist dabei eine von der Materialdämpfung verursachte Zeitdifferenz zwischen den Extrema von Eindringung und Verzögerung.

Die Bestimmung der Dämpfungskenngrößen ist von entscheidender Bedeutung. Es werden die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Schreibweisen des Dämpfungsterms dargestellt und mit Aussagen aus der Literatur verglichen.

Die Bewegungsdgl. ist nicht geschlossen, sondern nur näherungsweise lösbar. Trotzdem ist die Übereinstimmung des experimentell gefundenen mit dem errechneten Weg-Zeit-Verlauf beim Stoß des Druckelementes befriedigend. Die Eigenschaften der Dgl. wurden an einer Analogrechenanlage untersucht.

Fast zwangsläufig schließt sich an die Beschreibung und Erfassung

des Stoßes bei schlagender Kontrasterzeugung ein Kapitel an, in dem das Prinzip der drückenden Kontrasterzeugung vorgestellt wird. Hier tritt kein solcher wegen seiner Begleiterscheinungen lästiger Stoß mehr auf. Die Vorteile dieses Prinzips werden beschrieben. Es werden grundsätzliche Möglichkeiten von Wirkprinzipien genannt, die in /69/ nähere Erläuterung finden. Zur Auswahl der Druckelemente muß gezielte Forschung nach geeigneten Lösungen einsetzen.

Auf der Suche nach anderen leistungstärkeren Druckwerken wurden auch in handelsüblichen Druckern eingesetzte Antriebsmagnete der Drucknadeln untersucht. Dabei zeigte sich, daß allein durch Verbesserung der elektronischen Ansteuerung der Magnete eine erhebliche Steigerung der Schreibgeschwindigkeit erreicht werden kann /76/. Anschließend werden die Ergebnisse der Prüfung trilaminarer Piezo-Biegestreifen auf ihre Einsatzmöglichkeiten als direkter Antrieb von Druckelementen oder als Selektionseinheit zwischen Energiequelle und Druckelement vorgestellt. Unter bestimmten Bedingungen eignen sie sich für beide Gebiete. Umfangreiche Untersuchungen des Bewegungsverhaltens der Piezo-Biegestreifen bei sprungförmiger Änderung der elektrischen Feldstärke belegen dieses Ergebnis und erlauben weitergehende Aussagen zum Einfluß bestimmter Parameter. Der Endausschlag eines Biegestreifens wird berechnet und in einer bezogenen Darstellung mit dem Experiment verglichen. Die Übereinstimmung ist sehr gut. In Ergänzung zum ersten Kapitel wird auch hier das Problem der Materialdämpfung ausführlich untersucht.

6. Literaturnachweis (Bücher sind durch ● gekennzeichnet)

- /1/ Blume, P. "Grundlagen des Druckvorgangs bei mechanischen Schnelldrucken" Feinwerktechnik + Micronic 76 (1972), H. 4
- /2/ Berger, F. "Das Gesetz des Kraftverlaufs beim Stoß" Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig 1924
- /3/ Geiger, Scheel, Handbuch der Physik, Bd. 6
- /4/ Brunk, "Zum freien Stoß quasistarrer Körper" Ing.Archiv 43 (1974) S. 193 - 202
- /5/ Goldsmith, "Impact" London 1960 Edward Arnold (Publishers) Ltd.
- /6/ Krieger, D. "Die Erzeugung mechanischer Stöße" wiss.Z.d.TU Dresden 16 (1967), H.4
- /7/ "Das Stoßspektrum und Möglichkeiten seiner apparativen Bestimmung" wiss. Zeitschr. TU Dresden 1967
- /8/ Gohlke, W. "Elektronische Bestimmung dynamischer Spannungs-Dehnungskurven bei sehr schneller Stauchung" VDI-Z. 99 (1957) Nr. 13
- /9/ "Zur Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls von der Verformungsgeschwindigkeit" VDI-Z. 102 (1960) Nr. 13
- /10/ Rauch, M. "Das Prellen - eine wesentliche Erscheinung mechanischer Funktionsgruppen" Feingerätetechnik 23 (1974), H. 3
- /11/ VDI-Berichte Nr. 135 (1969)
- /12/ Weygandt/Risch "Zur Beurteilung von Stoßaufzeichnungen durch Schwingweg-, Schnelle- und Beschleunigungsmesser" Zeitschrift für Instrumentenkunde 62 (1942)
- /13/ Szabo, I. "Einführung in die Technische Mechanik" und "Höhere Technische Mechanik" Springer-Verlag 1966 und 1956



- /14/ Krieger, D. "Die Messung mechanischer Stöße mit piezoelektrischen Beschleunigungsaufnehmern" Feingerätetechnik, 17.Jg. Hft. 4 (1968)
- /15/ Hansen, K.-H. "Einfache Dimensionierungsregeln für die Elektronik beim Messen stoßartiger Vorgänge mit piezoelektrischen Aufnehmern" VDI-Berichte, Nr. 135, 1969
- /16/ Krieger, D. "Bewertung, Erzeugung und Messung mechanischer Stöße" Dissertation, TU Dresden 1967
- /17/ Forbat, N. "Analytische Mechanik der Schwingungen" VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966
- /18/ Philippow, E. "Nichtlineare Elektrotechnik" Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig 1963
- /19/ Kamke, E. "Differentialgleichungen - Lösungsmethoden und Lösungen - " 1. Gewöhnliche Dgln. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, Leipzig 1956
- /20/ Abel, N.H. "Sur l'équation différentielle  $(y+s)dy+(p+qy+ry^2)dx = 0$  in Oeuvres complètes Christiania, Stockholm 1839
- /21/ Klotter, K. "Technische Schwingungslehre" Bd. 1, Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg 1951
- /22/ Kauderer, H. "Nichtlineare Mechanik" Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958
- /23/ Sorokin, E.S. "Die Methode der Berechnung des inelastischen Materialwiderstandes bei der Berechnung der Schwingungen von Konstruktionen" in Korenew, B.G. "Dynamik von Baukonstruktionen" VEB Verlag Technik, Berlin 1953
- /24/ Писаренко, Л.С.  
Яковлев, А.П.  
Мамбеев, В.В. "Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов" издательство "Наукова думка" Киев, 1971

- /25/

Higuchi, S.

"On the logarithmic Decrement of the Damped Oscillation of an Elastic Thin Beam"

ZAMM (54) 1971, S. 427 - 432
- /26/

Bock, G.

"Schwingungsdämpfung unter Ausnutzung der Werkstoffdämpfung"

ZAMM (12) 1932, Heft 5
- /27/

Rappika, D.  
Hahn, U.

"Werkstoffdämpfung von Gußeisen und Stahl"

Maschinenbautechnik (21) 1972, H.2
- /28/

Roelig, H.  
Schmahl, J.

"Weiterentwicklung einer Prüfmaschine zur Bestimmung des Dämpfungsverhaltens von Polymeren"

Kautschuk und Gummi, (13) 1960, H.8
- /29/

Becker, H.

"Über das analytische Erfassen der Werkstoffdämpfung bei mechanischen Schwingungen"

VDI-Zeitschrift, 104 (1962), Nr. 2 und Nr. 4
- /30/

Pisarenko, G.S.

"Dissipationsenergien bei mechanischen Schwingungen"

Kiew, 1962 (russ.)
- /31/

Schmidt, E.

"Untersuchungen über Fundamentalschwingungen"

VDI-Zeitschrift, (67) 1923 Nr. 2
- /32/

"Experimentelle Untersuchung von schwingungsdämpfenden Unterlagen für Maschinen"

Gesundheits-Ingenieur (46) 1923, S. 61 - 71
- /33/

Freudenthal, A.M.

"Inelastisches Verhalten von Werkstoffen"

VEB Verlag Technik, Berlin 1955
- /34/

Kosten, C.W.

"Das Verhalten von Gummi bei statischer und dynamischer Druckbeanspruchung"

Kautschuk (15) 1939, H. 3
- /35/

Rösel, R.

"On the interpretation of Structural Damping"

ZAMM (58) 1973, S. 329 - 332
- /36/

Jentzsch, J.  
Dresig, H.  
Horn, K.  
Krause, K.-H.

"Deformationsmechanisches Verhalten von Gummi - 1. Teil"

Wiss. Z. d. TH Karl-Marx-Stadt (15) 1973, H. 2
- /37/

Krause, K.-H.  
Jentzsch, J.

"Deformationsmechanisches Verhalten von Gummi - 2. Teil"

Plaste und Kautschuk 1973, H. 8

- /38/ Siebel, L. "Handbuch der Werkstoffprüfung"  
Springer-Verlag 1955, Bd. 2
- /39/ Goloskokow, E.  
Filippow, A. "Instationäre Schwingungen mecha-  
nischer Systeme"  
Akademie-Verlag, Berlin 1971
- /40/ Reckling, K.-A. "Plastizitätstheorie und ihre An-  
wendung auf Festigkeitsprobleme"  
Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/  
New York 1967
- /41/ Prager, W.  
Hodge, P.G. "Theorie ideal plastischer Körper"  
Springer-Verlag, Wien 1954
- /42/ Schmitz, K.P. "Zwangsschwingungen des gedämpften  
Timoshenkostabes"  
Dissertation, Universität Rostock  
1972
- /43/ Luz, E. "Beitrag zur phänomenologischen  
Beschreibung der Dämpfungseigen-  
schaften fester Stoffe mit Anwen-  
dungen auf schwingende Kontinua"  
Ing.-Archiv, 1969, S. 353 - 368
- /44/ Förching, H. "Die Schwingungsanalyse elasto-  
mechanischer Systeme mittels vek-  
torieller Ortskurven"  
VDI-Zeitschrift (105) 1963, Nr. 27
- /45/ Costadoni, C. "Ein elektrodynamisches Gerät zur  
Messung mechanischer Scheinwider-  
stände von Körperschallstoffen,  
insbesondere bei Belastung"  
Zeitschrift für technische Physik  
17 (1936) S. 108 - 115
- /46/ Willms, W.  
Keidel, L. "Prüfung von Körperschalldämm-  
stoffen", Elektr.Nachr.-Technik  
11 (1934), S. 314 - 318
- /47/ Sorokin, E.S. "Zur Theorie der Reibung bei  
Schwingungen elastischer Systeme"  
Verlag Nauka, Moskau 1960
- /48/ Lang, G. "Die elastische Lagerung von Mo-  
toren mit Gummifeder-Elementen"  
VDI-Z. 99 (1957) Nr. 17
- /49/ Milne, R.D. "On the Estimation of Structural  
Damping from Aircraft Resonance  
Tests"  
Journal of the Aero/Space  
Sciences, May 1960
- /50/ Weidenhammer, F. "Biegeschwingungen des Stabes mit  
nichtlinearem Elastizitätsgesetz"  
ZAMM 32 (1952) S. 265 - 266



- /51/ Schimmerl, J. "Beitrag zur näherungsweise Berechnung von Vertikal- und Torsionsschwingungen im schichtweise inhomogenen nichtlinearen, nicht-elastischen Baugrund" Ing. Archiv 1968, Bd. 37
- /52/ Troost, A.  
Betten, J. "Exakte Dämpfungskennwerte bei linearen Schwingungen" Zeitschrift Naturforschung 25 a S. 1994 - 1996, 1970
- /53/ Welzk, F.-J. "Werkstoffdämpfung bei Torsionsschwingungen" Wiss. Z. d. TH Karl-Marx-Stadt 14 (1972), H. 2
- /54/ Prandtl, L. Zeitschr. Angew. Math. und Mech. 8 (1928), S. 85
- /55/ Müller-Vogt, G. Archiv Eisenhüttenwesen 32 (1961) S. 323
- /56/ Dawidenkow, N.N. "Zerstreuung der Energie bei Vibrationen" JTP, Teil 8, 1938, Auszug 6
- /57/ Bögelsack, G. "Über spezielle Probleme elektromechanischer Schreibantriebe" Dissertationsschrift, TU Dresden 1962
- /58/ Haase, H.-J. "Berechnung elektromechanischer Systeme nach den Methoden der Systemtheorie" Diplomarbeit TH Ilmenau, 44 - M 70 - 45 - 74
- /59/ Michlin, S.G.  
Smolizki, Ch.L. "Näherungsmethoden zur Lösung von Differential- und Integralgleichungen" Verlagsgesellschaft B.G. Teubner 1969
- /60/ Bräuning, G. "Gewöhnliche Differentialgleichungen" VEB Fachbuchverlag Leipzig 1964
- /61/ Fodor, G. "Laplace transforms in engineering" Budapest 1965
- /62/ Heber, G. "Mathematische Hilfsmittel der Physik" Bd. II WTB, Akademie-Verlag Berlin, 1967
- /63/ Berg, L. "Einführung in die Operatorenrechnung" VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962

- /64/ Doetsch, G. "Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation"  
R. Oldenburg Verlag  
München - Wien 1967
- /65/ Зрагштейн, М.С.  
Рыжик, М.М. "Таблицы - интегралов, сумм, рядов и произведений"  
Государственное издательство физико-математической литературы  
Москва 1962
- /66/ Conte, L. in Bolletino Unione Mat. Italiana  
11 (1932) S. 216 -219
- /67/ Rauch, M. "Einfluß des Prellens auf die Dynamik elektromechanischer Systeme"  
Kolloquiumsheft 4 der Vortragsreihe B 1 beim 22. Internationalen Wissenschaftlichen Kolloquium der TH Ilmenau 1977
- /68/ Horn, H. "Experimentelle Bestimmung des Kraft-Weg-Gesetzes für das Eindringen eines Stempels in eine Schreibmaschinenwalze"  
Diplomarbeit 44 - M67 - 33 - 71  
TH Ilmenau 1971
- /69/ Thrum, F.  
Mettke, R. "Experimentelle und theoretische Untersuchungen für neue Abdrucksysteme beim Mosaikdruck"  
Forschungsbericht vom November 1974, TH Ilmenau Sektion GT
- /70/ do. Forschungsbericht vom September 1974
- /71/ Autorenkollektiv Handbuch "Piezolan"  
Keramische Werke Hermsdorf, 1972
- /72/ Hamerak, K. "Die Piezoelektrizität und ihre technischen Anwendungen"  
KEM 5/1971
- /73/ Budig, D.-K.  
Riedel, C.  
Morgenstern, G.  
Magerl, R. "Piezoelektrische Relais"  
Elektrie 27 (1973), H. 8
- /74/ Thrum, F.  
Mettke, R. "Untersuchungen zu trilaminaren Piezo-Biegestreifen"  
Feingerätetechnik 1976 (25), H. 9
- /75/ Lenk, A. "Elektromechanische Systeme"  
Bd. 1 und 2  
Verlag Technik Berlin 1974

/76/ Donath, A.

"Elektromagnetischer Antrieb für  
einen Druckstift"  
Diplomarbeit TH Ilmenau  
44 - M 69 - 29 - 73

/77/ Graubner, W.

"Die Berechnung der Parameter der  
dynamischen Charakteristik gleich-  
stromerregter elektromagnetischer  
Systeme mit translatorischer An-  
kerbewegung"  
Dissertation, TH Ilmenau 1968

● /78/ Kallenbach, E.

"Der Gleichstrommagnet"  
Geest & Portig KG  
Leipzig 1969

/79/

"Untersuchungen zur Dynamik  
elektromagneto - mechanischer  
Antriebe"  
Feingerätetechnik 20 (1971), H.9